

Máster Universitario en Ciencias Actuariales y Financieras  
2020-2021

*Trabajo Fin de Máster*

“Planes de pensiones paneuropeos:  
Aplicación práctica y propuestas de  
modelización actuarial”

---

Pedro García Guzmán

Tutor/es

José Miguel Rodríguez-Pardo del Castillo

Jesús Ramón Simón de Potro

Madrid, julio de 2021

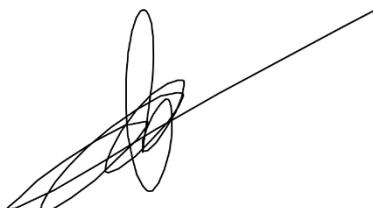


Esta tesis es propiedad del autor. No está permitida la reproducción total o parcial de este documento sin mencionar su fuente. El contenido de este documento es de exclusiva responsabilidad del autor, quien declara que no se ha incurrido en plagio y que la totalidad de referencias a otros autores han sido expresadas en el texto.

En caso de obtener una calificación igual o superior a 9.0 (Sobresaliente), autorizo la publicación de este trabajo en el centro de Documentación de la Fundación Mapfre.

Sí, autorizo a su publicación.

No, desestimo su publicación.



Firmado: Pedro García Guzmán



Esta obra se encuentra sujeta a la licencia Creative Commons **Reconocimiento – No Comercial – Sin Obra Derivada**

**Resumen:**

Los planes de pensiones individuales paneuropeos se diseñan con un objetivo claro: incrementar el ahorro individual en la jubilación complementario a la pensión pública. Su obligada acogida a partir de junio de 2022 por parte de las diferentes compañías comenzará a generar diferentes desacuerdos conforme a su tratamiento financiero-actuarial por el desconocimiento de estos nuevos productos. En el presente trabajo se pretende dar a conocer de forma teórica las principales características con las que contarán, trasladando las bases disponibles en el Reglamento a un lenguaje más cercano y comprensible, así como exponer una metodología y un caso práctico que ayude a entender cómo tratarlos. Dada la uniformidad con la que se pretende tratar la normativa en todo el territorio que conforma la Unión Europea, como propuestas de modelización actuarial se incluye la generación de una tasa de mortalidad paneuropea que llevará a la creación de una tabla de mortalidad para esta población y la proyección de la mortalidad mediante Lee-Carter para su trato en la aplicación práctica.

**Palabras clave:** Pensiones; Paneuropeo; Tabla de mortalidad; Renta vitalicia.

**Abstract:**

The Pan-European personal pensions are designed with a clear objective: to increase individual retirement savings in addition to the public pension. Its compulsory reception from June 2022 by the different companies will start to generate different disagreements regarding their financial-actuarial treatment due to the lack of knowledge of these new pensions. The aim of this paper is to provide a theoretical explanation of the main characteristics of these new products, transferring the bases available in the Regulation to a more accessible and understandable language, as well as to present a methodology and a practical case that will help to understand how to deal with them. Given the uniformity with which the regulations are intended to be treated throughout the European Union, actuarial modelling proposals include the generation of a Pan-European mortality rate that will lead to the creation of a life table for this population and the projection of mortality by means of Lee-Carter for its treatment in practical application.

**Key words:** Pensions; Pan-European; Life Table; Life annuity.

## ÍNDICE

1	INTRODUCCIÓN .....	1
1.1	MOTIVACIÓN .....	1
1.2	OBJETIVOS .....	2
2	PLANES DE PENSIONES PANEUROPEOS .....	4
2.1	MARCO HISTÓRICO .....	4
2.2	CARACTERÍSTICAS .....	7
2.3	FISCALIDAD, GASTOS Y TRIBUTACIÓN .....	12
3	METODOLOGÍA .....	16
3.1	TABLA DE MORTALIDAD PANEUROPEA .....	16
3.2	PREDICCIÓN DE LA MORTALIDAD: MODELO DE LEE-CARTER .....	22
3.3	ESTIMACIÓN DE LA PROBABILIDAD DE FALLECIMIENTO .....	26
3.4	CONSTRUCCIÓN DEL PLAN DE PENSIONES PANEUROPEO .....	28
3.4.1	Montante acumulado .....	28
3.4.2	Renta vitalicia .....	29
3.4.3	Rendimiento nominal de las inversiones .....	30
3.4.4	Tasa de inflación .....	35
3.4.5	Tendencia salarial y costes del plan .....	36
4	DATOS, HIPÓTESIS Y SOFTWARE .....	37
5	RESULTADOS .....	40
5.1	DATA EXPLORATORY ANALYSIS .....	40
5.2	TABLA DE MORTALIDAD PANEUROPEA .....	46
5.3	PROYECCIÓN DE LA MORTALIDAD .....	53
5.4	APLICACIÓN PRÁCTICA .....	59
6	CONCLUSIONES .....	65
	Bibliografía .....	69
	Anexo I – Código R .....	75
	Anexo II – Código Matlab .....	90

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

Figura 1.1. Flujo de emigración española con destino UE28 por año.....	4
Figura 2.1. Número de defunciones totales en hombres por país. Período 1990-2016..	43
Figura 2.2. Número de defunciones totales en mujeres por país. Período 1990-2016...	44
Figura 2.3. Número de defunciones paneuropeas en mujeres (izquierda) y hombres (derecha). Período 1990-2016 .....	47
Figura 2.4. Tasa de mortalidad paneuropea (log) en mujeres (izquierda) y hombres (derecha). Período 1990-2016 .....	48
Figura 2.5. Parámetros estimados del modelo de Lee-Carter para hombres .....	54
Figura 2.6. Parámetros estimados del modelo Lee-Carter para mujeres .....	54
Figura 2.7. Tasa de mortalidad paneuropea proyectada para hombres para el período 2017-2056.....	55
Figura 2.8. Tasa de mortalidad paneuropea proyectada para mujeres para el período 2017-2056. ....	56
Figura 2.9. Variable $k_t$ y esperanza de vida en hombres para el periodo 2017-2056...	57
Figura 2.10. Variable $k_t$ y esperanza de vida en mujeres para el periodo 2017-2056..	57

## ÍNDICE DE TABLAS

---

Tabla 1. Tabla de mortalidad paneuropea en Hombres. Base 2016. ....	50
Tabla 2. Tabla de mortalidad paneuropea en Mujeres. Base 2016. ....	51
Tabla 3. Datos de los partícipes.....	61
Tabla 4. Resultados del primer partícipe planteado .....	61
Tabla 5. Resultados del segundo partícipe planteado.....	63
Tabla 6. Resultados del tercer partícipe planteado .....	63
Tabla 7. Resultados del cuarto partícipe planteado .....	63



# INTRODUCCIÓN

## 1.1 MOTIVACIÓN

La inestabilidad del mercado laboral y los profundos cambios en la distribución de la riqueza en los países europeos han agravado los desafíos demográficos provocados por el envejecimiento de la población europea y han puesto en peligro cuestiones tan importantes como el sistema de pensiones europeo que, por ejemplo, ya está incorporando a la población nacida entre 1946 y 1965, conocida como *baby boomers*, haciendo que el número de pensiones se vea incrementado de manera considerable.

Las pensiones son la principal fuente de ingresos de los jubilados, y en la mayoría de los casos la única, lo que significa que, para muchas personas, disponer de una pensión adecuada y suficiente les permitirá vivir cómoda o no tan cómodamente su jubilación. De hecho, así mismo se plantea en las consideraciones previas al Reglamento Europeo que trata los planes de pensiones paneuropeos.

Estos planes nacen como una solución al problema que gira en torno a la forma de ahorrar que posee la mayoría de la población de la Unión Europea, canalizando esta sus ahorros en cuentas bancarias con vencimientos cortos. Asimismo, buscan llamar la atención de la población joven y activa ya que, si nos basamos en los datos que ofrece la Comisión Europea (2019) en su estudio, tan solo un 27% de personas de entre 25 y 59 años han adquirido un plan de pensiones individual, agravándose esta situación en países como España, donde menos del 15% de la población incluida en esta franja de edad han adquirido un plan de pensiones de este tipo.

Bien hay que decir que el Reglamento nace en 2019 y casi dos años después, a consecuencia de la crisis sanitaria ocasionada por el coronavirus, estos planes de pensiones han tenido que retrasar su trasposición a las legislaciones pertinentes de cada país. Hecho que se agrava al conocer que todos los países miembros de la Unión deben de ofrecer estos productos antes de junio de 2022.

Muchos expertos, como el propio Luis de Guindos, vicepresidente del Banco Central Europeo, mencionan que estos planes cuentan con una “falta de ambición” en cuanto a la portabilidad transfronteriza y, todavía, se encuentran muchos cabos sueltos en

elementos tan esenciales en este tipo de planes como la fiscalidad con la que se van a tratar.

De esta forma, en el presente trabajo, se tratará de dar respuesta a alguna de los problemas que presentan este tipo de planes de pensiones, siempre desde un punto de vista investigador y educativo, con la motivación que conlleva el analizar una propuesta legislativa de un producto de pensiones paneuropeo que contribuirá a dar salida a las necesidades de aquellas personas que quieran mejorar la conveniencia de sus ahorros de cara a su jubilación, así como a ayudar a los Estados miembros a “desahogar” la inseguridad que están planteando en los últimos años sus sistemas públicos de pensiones.

## **1.2 OBJETIVOS**

La incorporación de unos nuevos planes de pensiones al mercado y su obligatoriedad de comercialización por parte de la Unión Europea genera muchas dudas acerca de su tratamiento y puesta en marcha, más aún si cabe cuando desde la propia Comisión Europea no se aclaran distintos puntos de vital importancia para la venta de estos activos financieros.

Por ello, con este trabajo se pretende dar una visión general de lo que sería un Producto Paneuropeo de Pensiones Individuales, explicando de forma teórica las principales características con las que cuenta, entre las que se encuentra la fiscalidad de este tipo de productos; y aportar una visión de carácter también práctico, ejemplificando así la metodología que la normativa proporciona para la construcción de estos planes.

El Reglamento, como se verá en el Marco Teórico, pretende dar uniformidad a nivel europeo para la puesta en marcha de este nuevo activo. Añadiendo a ello el hecho de ser un producto que va a contar con un carácter transfronterizo, nos hace cuestionar la idea de crear una tabla de mortalidad paneuropea, ya que es posible contratar un plan en cualquier Estado miembro de la Unión perteneciendo a un Estado miembro distinto del Estado miembro promotor del producto. De esta manera, conseguiríamos dar un paso más allá en la ansiada uniformidad o unificación de los mercados capitales que desde la Comisión Europea se busca, de arreglo, además, con los principios de distribución del riesgo y de solidaridad por los que se basa un seguro propiamente dicho.

Esta tabla la obtendremos a partir de un breve estudio de la mortalidad de dieciséis países miembros de la Unión con diferentes características. Entonces, a partir de estos datos ya agregados, se extraería lo que sería la tasa de mortalidad paneuropea. Gracias a esta, podremos crear esa tabla que nos permitirá realizar un breve estudio de la mortalidad y longevidad paneuropea mediante el uso del modelo de Lee-Carter, con el objetivo de proyectar la mortalidad con la que vamos a calcular los diferentes factores de mejora que utilizaremos para el cálculo de las probabilidades de fallecimiento a usar en el plan.

Conocidas estas nuevas  $q_x$ , reestructuraremos de nuevo las tablas paneuropeas de acuerdo a esta nueva variable, siendo ya, definitivamente, el escenario que sirva como base para el cálculo de las aportaciones y prestaciones que consolidarían el PEPP que se pretende crear.

Así pues, se puede concluir afirmando que este proyecto nace con un objetivo claro: Dar a conocer un nuevo producto con el que muy pronto los mercados van a convivir y que no están considerando y estudiando su entrada. Aparte de darlo a conocer, proponer algo que no se ha puesto sobre la mesa en la Comisión Europea y que sería interesante el valorarlo, como es la creación de una tabla paneuropea porque como bien decía Frida Kahlo: “Hay que ver más allá de la niebla y no esperar a que se disipe”.

## PLANES DE PENSIONES PANEUROPEOS

### 2.1 MARCO HISTÓRICO

En septiembre de 2015 y dentro de los objetivos propuestos en el Plan de acción de la Comisión Europea para la creación de un mercado de capitales ya se planteaba la idea de realizar un mercado de pensiones europeo que fuera sencillo y que apostara por la competitividad de este tipo de productos.

Esta idea vuelve a tener presencia en la Resolución del 19 de enero de 2016 del Parlamento Europeo, en la cual se establecían diferentes retos que persiguieran la unión de los mercados de capitales. Así pues, dentro de la Resolución se hacía mención ya a los Planes de pensiones paneuropeos o *PEPP*, que pretendían aportar diferentes ventajas a las economías de los países y la espera de una mayor inversión en productos que incentivasen el ahorro a largo plazo. De esta manera, en septiembre de este mismo año se anuncia que una posible propuesta legislativa se podría presentar en 2017.

Llegado junio de 2017 se pasa, como ya se anunció, del “dicho al hecho”: se aprobaba por la Comisión Europea el proyecto de Reglamento donde se establecían todas las condiciones que deberían de cumplir los novedosos planes de pensiones paneuropeos, un nuevo producto financiero de escala internacional cuya creación viene incentivada por diversos aspectos que se venían percibiendo en los últimos años y que se detallan, *grosso modo*, a continuación.

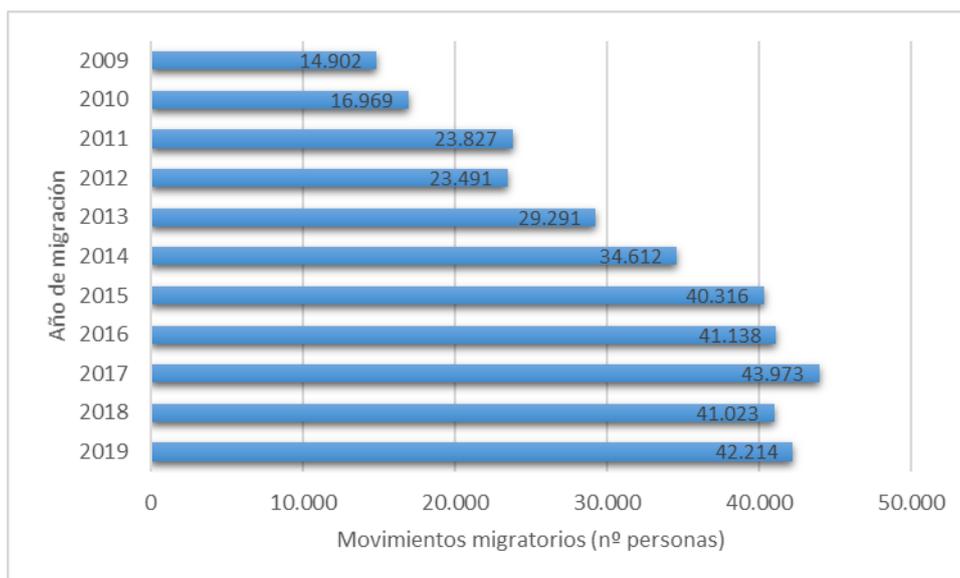
La población de la Unión Europea estaba, y está, caracterizada por ser una de las más ahorradoras del mundo, el problema versa en que estos ahorros están depositados en cuentas bancarias con vencimientos cortos. El miedo a la inversión a largo plazo era latente y así lo demuestran informes como el proporcionado por la UNESPA, del cual el Instituto Santalucía en 2016 recogerá los aspectos más importantes de cara al estudio de seis indicadores diferentes, donde se realizaba un promedio de ellos de los datos comprendidos entre los años 1995 y 2015 para los países que conforman la UE15 (Portugal, España, Francia, Grecia, Italia, Alemania, Luxemburgo, Bélgica, Países Bajos, Irlanda, Dinamarca, Austria, Suecia, Finlandia y, por ese momento, Reino Unido), y al que nos acogeremos en este punto.

Dentro de los indicadores estudiados encontramos la tasa de ahorro a largo plazo sobre la renta disponible, que explicaba la adquisición neta de seguros y fondos de pensiones expresada en términos de renta disponible de los hogares. Así pues, el país que mantiene un mayor ahorro a largo plazo históricamente es Suecia con un 10,12%. Países como España, Finlandia y Grecia se sitúan a la cola del ahorro con un 2,20%, 2,12% y 0,20% respectivamente (Miguel, B., 2017). De esta forma podemos ver la necesidad que había de reenfocar los ahorros de la población a una perspectiva a más largo plazo.

Algo que puede explicar el hecho de que la población europea no apostara por la inversión a largo plazo es la tasa de sustitución del sistema de reparto. Este indicador mide la generosidad que posee el sistema de pensiones de cada país respecto a la cantidad cobrada como renta tras la jubilación. La lista la encabezaba España, donde los españoles, en promedio en 2015, percibían como pensión el 82,11% de su último sueldo. Una situación bastante generosa de la que se desmarcaban países como Dinamarca, Países Bajos y Reino Unido con un 21,45%, 27,11% y 29,69% respectivamente. De esta manera, esta situación de disparidad entre los países genera el interés por formular un nuevo tipo de inversiones atrayente a un público especialmente joven que consiguiera estabilizar y armonizar la problemática europea.

Los jóvenes, y la población activa en general, eran los principales clientes potenciales en los que se pensó a la hora de crear los *PEPP*, ya que, como se comentaba en la Introducción, el 27% de la población europea comprendida entre 25 y 59 años no tenía suscrito ningún plan de pensiones (Gil, A., 2019). Además, si enlazamos esta carencia con los datos que mostró la Comisión Europea en relación a la población en edad de trabajar que residía en un país miembro de la Unión, distinto del Estado miembro del que eran nacionales, llegamos a la cifra de 11,3 millones de europeos en 2015 que presentaban estas características. Asimismo, se mostraron datos en los que se manifestaba que 1,3 millones trabajaban en un Estado miembro distinto al país que tenían por residencia y que pertenecía, también, a la Unión Europea.

De acuerdo a esto, y a objeto de visualizar cifras, se presenta a continuación la evolución de las emigraciones a un país miembro de la Unión Europea que han presentado, en este caso, los españoles entre 2008 y 2019.



**Figura 1.1.** Flujo de emigración española con destino UE28 por año.

*Fuente: Elaboración propia a partir de datos del INE.*

Así, cuando se ideó en 2015 la propuesta de inclusión de nuevos activos financieros a nivel europeo se puede comprobar que, en países como España, la cifra de residentes que estaban emigrando hacia un país de la Unión incrementaba considerablemente año tras año y, además, se seguía esperando el continuo crecimiento de los flujos migratorios en el futuro. La necesidad de generar un producto de pensiones que permitiera la portabilidad internacional podría generar un mayor atractivo a la inversión en este tipo de productos, contribuyendo a promover entre los europeos el derecho a vivir y a trabajar en cualquier punto de la Unión y, del mismo modo, generando un mercado más competitivo para empezar el camino al ahorro a largo plazo.

Si ahora cambiamos la canalización del ahorro por el problema demográfico, en el estudio presentado y del que hemos ido hablando hasta ahora se trataba un indicador muy interesante y es el relacionado con la tasa de dependencia demográfica, que medía el peso que tenía la población en edad pasiva respecto a la población activa. La lista la encabezaba esta vez Portugal con más de un 50%, viniendo a decir que la población que ya disfrutaba de algún tipo de pensión era el equivalente a la mitad de la población que se encontraba cotizando aún. Mejores datos eran los que ofrecían países como Luxemburgo o Irlanda, que oscilaban en torno al 32%. No obstante, todos los datos preocupaban ya que hacían cuestionarse los problemas demográficos a los que se

enfrentaba la Unión Europea en el futuro. Y es que el reto demográfico era algo a la orden del día en la política europea.

La esperanza de vida de la población estaba en constante aumento. Ya en 2015 la longevidad esperada de un europeo al nacer se situaba en 77,7 años para hombres y 83,3 años para las mujeres, habiendo aumentado en torno a dos años con respecto a los datos presentados diez años atrás. Las predicciones que se realizaban en el estudio de la UNESPA mencionado para el período 2015-2080 estimaban que, para cada uno de los países europeos que se incluían, la esperanza de vida sobrepasaría los 85 años. El problema se manifiesta cuando comparamos este indicador con la tasa de actividad que había en 2015. De toda la población en edad de trabajar, países como Grecia, Italia y España, en torno al 56% se consideraban población activa. Mejores datos eran los que presentaban Suecia, Países Bajos y Dinamarca, con más de un 70% de población activa. No obstante, la población europea envejecía y no se contaba con la suficiente población activa para poder mantener las diferentes pensiones en el largo plazo. Había que dar una solución.

Retomando lo comentado al principio de este punto, a objeto de solventar las necesidades expuestas que afectaban directamente al ahorro a largo plazo de la población europea y realizando una estimación de las posibles ganancias que se podrían obtener, el Parlamento Europeo aprueba, como acuerdo provisional, el cuatro de abril de 2019, el Reglamento que trata el Producto Paneuropeo de Pensiones Individuales con 338 votos a favor procedentes de los grupos parlamentarios conformados por el Grupo de la Alianza de los Liberales y Demócratas por Europa y el Partido Popular Europeo, 143 votos en contra y la abstención de 139 parlamentarios (Bermell, C., 2019).

## **2.2 CARACTERÍSTICAS**

Estamos situados ya en el contexto histórico que incentivó la creación de este tipo de activos financieros, pero aún no sabemos qué características tienen los planes de pensiones paneuropeos. Es en este punto donde se abordarán las ventajas e inconvenientes que tienen, aludiéndose por ello al Reglamento que trata los planes y al punto de vista de distintas instituciones y autores que abordan estos novedosos productos.

En primer lugar, el Instituto BBVA de Pensiones (2020) define a los planes de pensiones paneuropeos como: “un plan de pensiones individual voluntario que

complementará los sistemas de pensiones públicos y sistemas de pensiones de empleo existentes, así como los planes privados de pensiones nacionales, en los distintos países de la Unión Europea”.

Otro punto de vista es el ofrecido por Aurelio Jiménez (2020), que ve este tipo de planes como “un producto con el que ofrecer más opciones de ahorro para la jubilación a los ciudadanos europeos”, pudiendo con ellos reducir costes y controlar riesgos asociados a este tipo de productos.

Ya de acuerdo con el Reglamento, en su artículo dos, se define al «producto paneuropeo de pensiones individuales» o «PEPP» como “un producto de pensiones individuales de ahorro a largo plazo, que ofrece una empresa financiera apta [...] y que suscribe con un ahorrador en PEPP, o una asociación de ahorradores en PEPP independientes en nombre de sus miembros, de cara a su jubilación, con una posibilidad de rescate estrictamente limitada o nula e inscrito de conformidad con el presente Reglamento”.

Por lo tanto, se podría decir que estamos ante un tipo de plan de pensiones individual que complementará los sistemas públicos de pensiones de la Unión y que tendrá especiales e innovadoras características en temas de portabilidad transfronteriza, generando una mayor competencia con el objetivo de captar la atención, especialmente, de un público que, a consecuencia de su movilidad internacional, pueda verse beneficiado.

Este tipo de planes, además, será proporcionado por una gran variedad de empresas financieras que recoge el Reglamento y que, a partir de ahora las llamaremos promotores del PEPP, como, por ejemplo, entidades de crédito, empresas de seguros y fondos de pensiones de empleo (FPE), o, también, empresas de servicios de inversión, empresas de gestión y gestores de fondos de inversión alternativos (GFIA), siempre y cuando estén todas ellas autorizadas de acuerdo a las diferentes Directivas que las regula.

Para poder ofrecer un PEPP, los promotores deberán de seguir un proceso de inscripción estipulado en la norma y que pasará, en primer lugar, por la autoridad nacional competente que, en el caso de España, se trata de la Dirección General de Seguros y Fondos de Pensiones (DGSP). Una vez aprobado por ésta, la Autoridad Europea de Seguros y Pensiones de Jubilación (AESPJ) ya puede inscribir el nuevo PEPP, el cual podrá ser vendido en los distintos países de la Unión Europea por sus promotores y

distribuidores, siendo estos últimos todas aquellas empresas que recogíamos en el párrafo anterior pero que, en este caso, a diferencia de la función que cumplían como promotores, están autorizadas a distribuir PEPP no producidos por ellas, aparte de toda empresa de inversiones que ofrezca asesoramiento para la inversión o todo intermediario de seguros autorizado.

Este hecho de poseer tan gran variedad de empresas en tan distintos países genera una ventaja para el consumidor procedente de la mayor oferta de productos de los que se va a disponer, provocando en los promotores de PEPP el tener que ofrecer un aumento en la calidad de sus productos, así como una reducción de los costes debido al aumento de la competencia. Por otro lado, el hecho de estar supervisados en cada país por las autoridades competentes garantiza cierto respaldo al cliente del producto paneuropeo, ya que la comercialización de este tipo de planes lleva consigo una mayor regulación previa a la contratación del plan. Por ejemplo, el consumidor conocerá todo lo correspondiente a tarifas, costes y beneficios antes de contratarlo.

Ya que se ha hecho referencia a la supervisión, la EIOPA publica en junio de 2021 unas directrices sobre la presentación de la información a efectos de supervisión del PEPP. En ella especifica que, cada año, las autoridades competentes en cada país deben de controlar que todos los promotores del PEPP identificados presenten información de carácter cuantitativo sobre la actividad económica que han tenido de estos planes a cierre del ejercicio financiero de la empresa promotora, no pudiendo tardar para su presentación más de 18 semanas desde la fecha de cierre.

Asimismo, deberán de prestar especial atención a la presentación por parte de los promotores del PEPP del informe de supervisión del plan al menos cada tres años desde la fecha de inscripción, así como cuando se produzcan cambios que se puedan considerar significativos en el negocio de estos productos.

Este informe de supervisión debe de hacer referencia, como mínimo, a los siguientes ámbitos: información relativa a la actividad del PEPP; estrategias de inversión realizadas y resultados de las mismas; sistemas de gestión de riesgos y efectividad de los métodos para su reducción; y, por último, aspectos relativos al marco prudencial del promotor del PEPP, estando en este último punto la información concerniente a los principios de valoración aplicados en temas de solvencia y la estructura del capital.

Entrando ahora en la portabilidad de este tipo de planes, característica diferenciadora de estos nuevos productos, las personas que se vean en la necesidad de cambiar su residencia a otro país miembro de la Unión podrían seguir contribuyendo al mismo PEPP, manteniendo así los mismos beneficios con los que contaba y contribuyendo con las mismas condiciones y garantías que las inicialmente previstas en el contrato. Las contribuciones al plan tras la portabilidad podrían hacerse bien abriéndose una nueva subcuenta de PEPP en el nuevo país con el mismo promotor inicial siempre y cuando cuente con tal opción, bien continuando en la misma subcuenta iniciada y ya existente.

Asimismo, si se quisiera cambiar de proveedor, se deberá de esperar un plazo mínimo de cinco años desde la celebración del contrato de PEPP y para cambios posteriores transcurrir también cinco años desde el último cambio aplicado. Estos cambios estarán sujetos a ciertos costes que vendrán regulados en la Ley y que estarán limitados a los costes administrativos en los que haya incurrido el promotor que se deja y que, en ningún caso, podrán superar el 0,5% del valor de los activos que se transfieren.

Este y otros costes se comentarán con mayor detalle en el siguiente apartado. Mientras tanto, se ha de mencionar que el consumidor podrá optar por diferentes opciones de inversión. Los promotores del PEPP podrán ofrecer hasta seis modalidades, donde se incluye el PEPP básico y opciones de inversión alternativas.

El PEPP básico representa la opción de inversión por defecto. Este será diseñado por los promotores partiendo de la base de una garantía sobre el capital que debería de abonarse al inicio de la fase de disposición y durante esta fase o una técnica de reducción de riesgos que persiga el objetivo de que el cliente pueda recuperar el capital.

Como se puede ver, al ser un producto novedoso y con el respaldo de la Unión Europea, la seguridad al cliente es un aspecto clave y fundamental para captar su atención. Es por ello por lo que la propia normativa que regula estos planes de pensiones indican el asesoramiento obligatorio que deben de hacer los promotores y distribuidores a la hora de comercializar un plan. Ello conlleva una evaluación de las exigencias y necesidades que, en materia de jubilación, cuentan los ahorradores, así como ver la idoneidad de este tipo de planes, ofreciendo, como ya hemos mencionado, diferentes modalidades de inversión de acuerdo a los diferentes perfiles de riesgo que puedan tener los clientes y

realizando proyecciones personalizadas y estándar para que puedan proporcionar una visión clara y de confianza al nuevo inversor.

Por todo ello, la normativa establece en el Reglamento Delegado (UE) 2021/473 de la Comisión del 18 de diciembre de 2020 la manera en la que se tratará o clasificará el riesgo. De esta manera, los promotores del PEPP clasificarán el PEPP básico y las diferentes opciones de inversión en cuatro categorías («1», «2», «3» y «4») en función del riesgo de no recuperar las aportaciones de acuerdo a la inflación, la pérdida que se espera o, en función, también, de la comparación de la remuneración esperada al inicio de la fase de disposición con el cual se permita lograr un nivel de prestaciones preestablecido para este estudio.

Para el cálculo de los diferentes riesgos planteados se deberá hacer desde las compañías promotoras un ejercicio en el que obtenga, mediante cálculos estocásticos, el intervalo en el que se situará la suma asegurada al final del periodo de acumulación, de acuerdo a hipótesis tales como una duración genérica de los periodos de acumulación, unos niveles estándar de aportaciones y la figura para el estudio de un ahorrador en PEPP genérico, donde se incluirán características como la esperanza de vida del ahorrador medio. Con todo ello, obtendríamos el riesgo, en tanto porcentual, respectivo a los estudios que prevé la norma y que deben de reflejarse de cara a la comercialización.

Todo lo comentado anteriormente se verá recogido en lo que el Reglamento denomina *documento de datos fundamentales y declaración de las prestaciones del PEPP*. Ambos documentos contendrán toda la información fundamental del PEPP contratado, incluyendo la forma en la que se darán las prestaciones, pudiendo ser ésta en forma de renta, cantidad fija única, retiradas o una combinación de las anteriores y con la posibilidad de ser distinta en cada una de las subcuentas que se pudiera tener.

Asimismo, dentro del documento de datos fundamentales se verán en el formato de pregunta-respuesta diferentes secciones que explicarán las condiciones con las que contará el plan como, por ejemplo, una sección titulada «¿Qué ocurre si [nombre del promotor del PEPP] no puede pagar?», donde se dará una breve descripción de si la pérdida se encuentra cubierta por un régimen de compensación, contando así con cierta garantía y, en caso afirmativo, se mencionará el régimen del que se trata, el nombre del garante y cuáles son los riesgos cubiertos.

Como vemos, la Comisión Europea pretende dar bastante fiabilidad al nuevo producto que pretende incorporar, pero a pesar de haber visto que son varias las ventajas que tiene, también cuenta con numerosos temas aún por despejar como, por ejemplo, la forma de arbitrar la edad a partir de la cual se podrá rescatar el plan, donde asociaciones como la Asociación Europea de Gestores de Fondos de Inversión (Efama) pide que sea un tema que se deje a decisión de cada uno de los países. Relativo también a las opciones de rescate se ha de decir que cada país cuenta con requisitos muy diferentes para que los ahorradores cobren lo que tienen depositado en sus planes y desde la Comisión y el Parlamento Europeo no se han pronunciado con una decisión uniforme y clara al respecto.

Aparte de esto, como ya comentábamos en la introducción, otro de los temas que generaba gran controversia era el tema de la fiscalidad que, por su especial interés, se abordará con más detalle en el siguiente apartado, junto a los gastos y la tributación que conforman estos novedosos planes de pensiones.

### **2.3 FISCALIDAD, GASTOS Y TRIBUTACIÓN**

En los inicios de la construcción de los planes de pensiones paneuropeos la fiscalidad era un tema que estaba sobre la mesa y que dejaron aparcado para tratar con posterioridad. Por ese entonces, los parlamentarios europeos artífices de estos planes reclamaron que se les concediera por parte de los países un trato fiscal preferente, fundamental para la aceptación del PEPP entre la población.

Asimismo, la Comisión Europea adelantaba la necesidad que había de optar por establecer un marco fiscal común para todos los países miembros, aun cuando estos activos financieros no cumplieran con los criterios propios de cada país para disfrutar de desgravaciones fiscales, ya que tenemos que tener en cuenta que en muchos de los Estados miembros las aportaciones que se realizan a planes de pensiones privados cuentan con algún tipo de desgravación fiscal, al igual que, en muchos otros Estados también de la Unión, los resultados de la inversión de esos productos no están sujetos a ningún tipo de imposición.

Por todo ello, el veintinueve de junio de 2017, la Comisión Europea dejaba aparcado el tema del tratamiento fiscal y solamente instaba a los Estados miembros a extender al PEPP las ventajas fiscales que concedieran a productos nacionales del mismo tipo.

Tras recibir numerosas críticas, entre ellas las de Luis de Guindos que se comentaba en la Introducción, el tema fiscal pasó a ponerse de nuevo sobre la mesa del Parlamento Europeo y el cuatro de abril de 2019 salía a la luz una Resolución sobre el tratamiento fiscal de los productos de pensiones individuales, incluido el producto paneuropeo.

Considerando en ese momento que el mercado interior de los productos de pensiones individuales seguía siendo un tema muy fragmentado entre los distintos países de la Unión, especialmente en lo que a desgravación fiscal se refiere y considerando también que en el mercado interior todos los proveedores y productos debían de recibir el mismo trato fiscal independientemente del país de origen, se proponía que se tomara en consideración dos propuestas. Por un lado, conceder cada país al plan las mismas desgravaciones fiscales de las cuales se benefician productos nacionales de similares características y, por otro lado, estudiar si conceder o no al PEPP de una desgravación fiscal específica y armonizada a nivel europeo, teniendo que quedar ésta recogida en un acuerdo multilateral por los diferentes países que conforman la Unión.

Igualmente, se subraya en la presente Resolución que, mientras que no se consideren y aprueben cualquiera de las propuestas dadas, la fiscalidad es competencia de los Estados miembros y que cualquier decisión que, en esencia, corresponda al tratamiento fiscal del PEPP, dependerá única y exclusivamente a cada Estado miembro.

De esta manera dejaban por escrito las diferentes ideas que se habían ido recogiendo a lo largo de los años, pero no se fija aún ninguna solución única y completamente consensuada y estudiada del trato fiscal que se le deben de dar a los productos paneuropeos, resultando así el tema fiscal uno de los hándicaps a los que se tendrán que enfrentar los distintos gobiernos de los países de la Unión si quieren ser competitivos frente al resto de países en materia de pensiones con estas características transfronterizas.

De acuerdo ahora a los gastos y comisiones, en el PEPP básico estos no podrán superar el 1% del capital acumulado del ahorrador al final del año del que se encuentre, debiendo de incluir aquellos gastos y comisiones en los que se incurra, estando dentro de ellos, especialmente, los costes administrativos, costes de inversión y costes de distribución. En cambio, no deberán incluirse dentro de este máximo del 1% los costes relacionados a elementos o características adicionales del PEPP básico ni los costes surgidos del cambio de proveedores.

Tampoco deberán incluirse dentro de este máximo los costes que estuvieran vinculados a garantías cuando el PEPP básico prevea una garantía sobre el capital. Estos costes, en el caso de que los hubiera, deberán de estar reflejados en el documento de datos fundamentales, teniendo el proveedor que separar en el mismo los costes que hayan sido cobrados por la garantía de capital del resto.

Respecto al 1% de gastos y comisiones, cada dos años a partir de la fecha de aplicación del Reglamento, la Comisión consultará con la AESPJ la revisión del porcentaje y su posible adecuación de acuerdo al nivel real de cambios en los gastos y comisiones y al impacto en la disponibilidad de estos planes de pensiones.

Relativo a las comisiones y gastos relacionados con el servicio de cambio de promotor, en cuanto al acceso a la información se refiere, el promotor del PEPP transmisor está obligado a facilitar la información al promotor del PEPP receptor, no habiendo cargos ni para este último promotor, ni para el ahorrador. Acceder a la información, por tanto, es gratuito. En cambio, la cancelación de la antigua cuenta sí que está sujeta a costes, aunque el total de comisiones y gastos que aplicará el promotor transmisor no podrá superar el 0,5% de los importes correspondientes o valor monetario de los activos en especie a transferir, limitándose de la misma forma a los costes administrativos en los que haya incurrido el promotor del PEPP.

Por último, relacionado con la legislación tributaria, el tipo impositivo va a depender de en qué país el ahorrador del PEPP tiene su residencia habitual. Del país de residencia en el momento de jubilación dependerá el importe real que se pagará y así se hace saber, por ejemplo, en la sección del documento que contiene los datos fundamentales «¿Qué puedo esperar en el momento de la jubilación?», donde el promotor hará constar que la legislación tributaria del Estado miembro de residencia podrá incidir en la prestación dada.

Ahora bien, aunque estos planes tengan características similares en todo el territorio europeo y funcionen de una manera parecida en los Estados miembros, sí que contarán con divisiones o “compartimentos” fiscales de forma separada, adaptados, como ya mencionábamos anteriormente en este apartado, a la fiscalidad de cada país. Si un cliente contrata este tipo de planes y cambia su residencia, por ejemplo, éste tendría la opción de elegir entre seguir contribuyendo en el país del que ya no es residente o comenzar a tributar en su nuevo país de residencia.

Se debe de tener cuidado en el caso de cambio de residencia planteado anteriormente con la opción que permite trasladar todo lo aportado en el anterior país al nuevo, ya que podría considerarse un rescate de dicho plan y que se tengan que tributar por los rendimientos obtenidos durante la estancia en el país que se deja.

## METODOLOGÍA

### 3.1 TABLA DE MORTALIDAD PANEUROPEA

Definimos la tabla de mortalidad como una herramienta de análisis demográfico que nos permite analizar la mortalidad de los individuos de una determinada población en diferentes edades y durante un período temporal determinado (INE, 2016). Con estas tablas se consigue la información básica que necesitan los seguros de vida y pensiones para poder determinar sus primas o reservas, por ejemplo.

De acuerdo ahora a lo que se va a realizar en este trabajo, una tabla de mortalidad de periodo indicaría el comportamiento coyuntural de la población que se está analizando en un periodo concreto, simulando la incidencia que generaría en una población ficticia durante dicho periodo el hecho de estar sometida a las tasas de mortalidad calculadas a partir de datos poblaciones de carácter histórico.

Las tablas de mortalidad también son conocidas como tablas de riesgo biométrico y como tal, les corresponderá una serie de hipótesis asociadas a este fenómeno. Así pues, la *estacionariedad* es considerada como el hecho determinante de la mortalidad de la población. Esto quiere decir que la mortalidad o supervivencia de un individuo depende exclusivamente de la edad que tenga, independientemente del momento físico o las diferentes circunstancias en que se ha llegado a tal edad.

Otra hipótesis que vendría implícita a la estacionariedad sería la *homogeneidad* de la población estudiada, asumiendo tácitamente que toda ella estaría sujeta a idénticos riesgos de mortalidad, suponiendo así que todos los individuos de una misma edad tendrían las mismas probabilidades de fallecimiento.

Por último, y acompañando a las hipótesis de estacionariedad y homegeneidad, se encuentra la suposición de *independencia*. Con esta última hipótesis se aclararía que las probabilidades de muerte y, por lo tanto, de supervivencia, a las que estarían sometidas la población son independientes. El hecho de que un individuo muera a una determinada edad es independiente de lo que pueda ocurrirle o no a otro de los individuos en esa edad o en otra totalmente distinta (Universitat de Valencia, 2011).

Los componentes de los que partiremos para la creación de una tabla de mortalidad y, por tanto, la información previa de la que disponemos en forma de base de datos, serían las siguientes funciones:

- **Población censal** a la edad  $x$ ,  $L_x$ : Dato que contiene el número de personas vivas reales entre los años  $x$  y  $x+1$  años. También conocido como población expuesta al riesgo. En nuestro caso al tratar con datos paneuropeos se ha procedido de la siguiente manera:

$$L_x = \sum_{i=1}^n L_i \tag{1.1}$$

Siendo  $L_x$  la población censal paneuropea a la edad  $x$ ;

$n$  el número total de países pertenecientes a la Unión Europea que han sido escogidos para el estudio;

y  $L_i$  la población censal de cada uno de los países que se han incluido en el estudio.

- **Defunciones** por edad  $x$ ,  $d_x$ : Número de defunciones reales de individuos de edad  $x$  que no alcanzan la edad  $x+1$ . Al igual que para la población censal, para las defunciones paneuropeas debemos de aplicar la siguiente expresión:

$$d_x = \sum_{i=1}^n d_i \tag{1.2}$$

Siendo  $d_x$  el número de individuos paneuropeos de edad  $x$  que fallecen sin alcanzar la edad  $x+1$ ;

$n$  el número total de países pertenecientes a la Unión Europea que han sido escogidos para el estudio;

y  $d_i$  el número de individuos de edad  $x$  que fallecen sin alcanzar la edad  $x+1$  para cada uno de los países incluidos.

A partir de estos datos iniciales, se puede calcular lo que se conoce como la **tasa específica de mortalidad** o tanto central a la edad  $x$ ,  $m_x$ . Esta se define como el riesgo medio o la incidencia relativa a la que está expuesta la población durante el tránsito entre los años  $t$  y  $t+1$ , no pudiéndose confundir con la  $q_x$ , que sería el tanto (anual) de mortalidad a la edad  $x$  y que se explicará más adelante.

Para el estudio de esta, se planteará como escenario aquel en el que se omiten los flujos migratorios y se utilizan datos agregados de defunciones y fechas de nacimiento. Así pues, asumiendo como hipótesis la distribución uniforme de las fechas de cumpleaños, los individuos que están contabilizados en  $L_x$  de cada  $t$  año estudiado (1990-2016) estarán, de media, medio año de su vida durante el año  $t$  en riesgo de fallecimiento con la edad  $x$ . Del mismo modo, los que permanecieron vivos hasta el año  $t+1$ , que sería  $L_x$  en  $t+1$ , contribuirán, de nuevo, de media, medio año con la edad  $x$  a esa exposición al riesgo en el periodo  $t$  (Lledó, J., 2017).

De esta manera, la tasa específica de mortalidad que quedaría para este estudio, vendría dada por la siguiente fórmula:

$$m_x = \frac{d_x^t}{\frac{1}{2}L_x^t + \frac{1}{2}L_x^{t+1}} \quad (1.3)$$

Siendo  $t$  el año de estudio y  $t+1$  el año posterior al año de estudio.

Una vez calculada esta tasa, estamos más cerca de obtener la probabilidad de fallecimiento o  $q_x$ . Para ello, tendremos en cuenta el supuesto de la distribución lineal de las muertes entre una edad y la siguiente, estimando entonces que el promedio de años vividos el último año de vida de los que mueren con edad cumplida  $x$ ,  $a_x$ , es  $\frac{1}{2}$ , suponiendo así una fuerza de mortalidad constante a lo largo del intervalo de edad. En consecuencia, se determinará la **probabilidad de fallecimiento** a la edad  $x$  como:

$$q_x \approx \frac{m_x}{1 + \frac{1}{2}m_x}, \quad \text{donde } x = 0, 1, 2 \dots 109 \quad (1.4)$$

De la misma forma, se establece el suceso de muerte segura para el grupo abierto de 110 años o más (110+) que se estudia, siendo este el grupo máximo de estudio y teniéndose así que:

$$q_{110+} = 1 \quad (1.5)$$

La  $q_x$  representa la función base o clave para determinar el resto de variables que se plantean en la tabla de mortalidad. A partir de esta información, tendremos que rehacer variables como la  $L_x$  y la  $d_x$  ya estudiadas y construir otras nuevas funciones.

Entenderemos mejor la fórmula 1.4 y el porqué de esa aproximación con el estudio de otras funciones, luego el primero de los elementos que veremos para ello, es  $l_x$  o **supervivientes** a la edad exacta  $x$ , representando el número de individuos de una cohorte inicial planteada, establecida para este estudio en una población ficticia de 100.000 habitantes, que alcanzarían con vida la edad  $x$  que se estudie. De esta manera, según lo comentado,  $l_x$  para la edad  $x$  igual cero, vendría dada como  $l_0=100.000$ . Para el resto de edades  $x$ , habrá que rehacer la función  $d_x$ , que esta vez no representará las defunciones reales habidas, sino las defunciones teóricas a partir de la población de cohorte ficticia planteada, que se irá minorando para cada edad  $x$  calculada, y la probabilidad de fallecimiento para dicha edad. De acuerdo a esto, la nueva  $d_x$  vendría dada por la siguiente fórmula:

$$d_x = l_x \times q_x \tag{1.6}$$

Donde  $l_x$  representaría a los individuos que llegan con vida a la edad  $x$  partiendo de la cohorte ficticia inicial planteada;  $q_x$  la probabilidad de fallecimiento para la edad  $x$ ; y,  $d_x$  constituiría el número de defunciones de esa cohorte ficticia para individuos de edad cumplida  $x$ .

Partiendo ahora de que  $l_0 = 100.000$  y  $d_0 = l_0 \times q_0$ , el cálculo de  $l_x$  para el resto de edades  $x$ , se realizaría de la siguiente manera:

$$l_x = l_{x-1} - d_{x-1}, \quad \text{donde } x = 1, 2, 3 \dots 110 +$$

O, lo que es lo mismo:

$$l_{x+1} = l_x - d_x, \quad \text{donde } x = 0, 1, 2 \dots 109 \tag{1.7}$$

Siendo  $l_{x-1}$  y  $d_{x-1}$  el número de supervivientes de la cohorte ficticia a la edad exacta  $x - 1$  y el número de defunciones de esa misma cohorte para la edad  $x - 1$ , respectivamente.

Ahora bien, conocidos los nuevos  $l_x$  y  $d_x$  podemos estimar la nueva población censal de edad  $x$ ,  $L_x$ , calculada ya ésta conforme a la nueva cohorte ficticia y bajo el supuesto de distribución uniforme de las defunciones entre una edad y la siguiente, quedando representada bajo la siguiente expresión matemática y su correspondiente cálculo:

$$L_x = \int_0^1 l_{x+t} dt = \frac{l_x + l_{x+1}}{2} = \frac{l_x + l_x - d_x}{2} = l_x - \frac{1}{2} d_x \quad (1.8)$$

A partir de aquí, con las funciones calculadas hasta ahora, de la fórmula 1.6 extraemos que  $q_x = \frac{d_x}{l_x}$ . Asimismo, derivando de la ecuación 1.8,  $l_x$  también puede ser calculada como  $l_x = L_x + \frac{1}{2} d_x$ , por lo que si sustituimos en la fórmula de la probabilidad de fallecimiento quedaría de la siguiente forma:

$$q_x = \frac{d_x}{L_x + \frac{1}{2} d_x} \quad (1.9)$$

Dividimos numerador y denominador por  $L_x$ :

$$q_x = \frac{d_x/L_x}{1 + \frac{1}{2} d_x/L_x} \quad (1.10)$$

Y, además, sabemos que, por definición,  $m_x = \frac{d_x}{L_x}$ , por lo que si sustituimos en la función, nos quedaría:

$$q_x = \frac{m_x}{1 + \frac{1}{2} m_x} \quad (1.11)$$

De esta forma, ya conocemos el porqué de la fórmula 1.4 que presentábamos anteriormente, donde se planteaba la ecuación que daría por resultado cada una de las probabilidades de fallecimiento para cada edad  $x$ , destacando que el signo de

aproximación que en ella se hacía es referente a la diferencia de cálculo que se ha estimado en este estudio para el cálculo de la tasa específica de mortalidad,  $m_x$ , y que se refleja en la fórmula 1.3 el cálculo que ha sido empleado.

Partiendo de la probabilidad de fallecimiento, estamos en condiciones ya, también, de extraer a partir de esta **la probabilidad de supervivencia o tanto (anual) de supervivencia** a la edad  $x$ ,  $p_x$  que se definiría como la probabilidad que tiene un individuo incluido en la cohorte ficticia inicial de sobrevivir hasta cumplir  $x$  años de edad y no morir en dicha edad, es decir, la probabilidad que tiene un individuo de  $x$  años de llegar vivo a la edad  $x+1$ .

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} \tag{1.12}$$

Si sabemos que la  $q_x$  representa la probabilidad que tiene el individuo de fallecer con la edad  $x$ , podemos representar, también, la  $p_x$  como:

$$p_x = 1 - q_x \tag{1.13}$$

Para finalizar, la última función que incluiremos en la tabla de mortalidad paneuropea es la referente a la **esperanza de vida** a la edad  $x$ , siendo esta el número medio de años que les queda por vivir a los individuos supervivientes de esa cohorte ficticia inicial en la edad  $x$ . Para su cálculo, previamente, calcularemos otra función más que, en este caso, se trata del total de años de vividos desde la edad  $x$  o **cantidad de existencia** a la edad  $x$ ,  $T_x$ , que se definiría como el número total de años que quedan por vivir a la totalidad de individuos de la cohorte a la edad  $x$  y que viene definida por:

$$T_x = \sum_{k=x}^{\omega} L_k \tag{1.14}$$

Siendo omega ( $\omega$ ) la edad límite de la población en la tabla de mortalidad paneuropea, también conocida como infinito actuarial.

La esperanza de vida a la edad  $x$ , pues, resultaría entonces del cociente entre la cantidad de existencia a la edad  $x$  y, respectivamente, el número de supervivientes a la misma edad:

$$e_x = \frac{\sum_{k=x}^{\omega} L_k}{l_x} = \frac{T_x}{l_x} \quad (1.15)$$

### 3.2 PREDICCIÓN DE LA MORTALIDAD: MODELO DE LEE-CARTER

Lee y Carter publicaron en 1992 un nuevo método de previsión a largo plazo de la mortalidad, basado en una combinación de métodos estadísticos de series temporales y un enfoque sencillo para tratar la distribución de la mortalidad por edades (Lee, 2000).

Partiremos de la tasa específica de mortalidad  $m_{x,t}$  donde  $x$  representaría la edad de los individuos y  $t$  el año calendario. Así pues, según lo visto ya en el punto anterior, sabemos que, por definición,  $m_{x,t} = \frac{d_{xt}}{L_{xt}}$ , representado aquí el numerador el número de fallecidos a la edad  $x$  en el período  $t$  y el denominador la población censal o expuesta al riesgo de edad  $x$  y en el año  $t$  (Macias *et al.*, 2018).

El modelo de Lee-Carter viene dado por la siguiente expresión:

$$\ln(m_{x,t}) = a_x + b_x^1 k_t + \varepsilon_{x,t} \quad (2.1)$$

Cuyos parámetros pueden interpretarse de la siguiente manera:

- $a_x$ : parámetro independiente del tiempo que representa un patrón constante de una edad específica de mortalidad;
- $b_x^1$ : parámetro que mide las desviaciones producidas en la mortalidad para cada edad  $x$ ;
- $k_t$ : parámetro que recoge la tendencia en la mortalidad en el tiempo, en escala logarítmica;
- $\varepsilon_{x,t}$ : es el término residual o de error, siendo este efectos aleatorios Gaussianos distribuidos en edad y tiempo como  $N(0, \sigma^2)$ .

Con objeto de obtener una única solución para el sistema de ecuaciones, debido a la construcción bilineal multiplicativa ( $b_x^1 k_t$ ) en la ecuación, hay que tener en cuenta las siguientes restricciones:

1.  $\sum_x b_x^1 = 1$
2.  $\sum_{t=t_1}^{t_n} k_t = 0$

Para la estimación de los parámetros comenzaremos diciendo que Lee y Carter realizaron un modelo que lo que pretendía era minimizar el error cuadrático medio usando la descomposición en valores singulares ajustando mediante el ajuste de este modelo en dos etapas. Así pues, los parámetros que se vayan a obtener minimizarán la siguiente ecuación:

$$\sum_{x,t} \left( \ln(m_{x,t}) - (a_x + b_x^1 k_t) \right)^2 \quad (2.2)$$

Desde aquí, tendremos que tener en cuenta la segunda restricción de las dos anteriormente planteadas y derivaremos respecto a  $a_x$  e igualaremos a cero, obteniendo así el siguiente estimador de los efectos de edades específicas:

$$\hat{a}_x = \frac{1}{n} \sum_{t=t_1}^{t_n} \ln(m_{x,t}) \quad (2.3)$$

Aplicamos ahora a la matriz  $Z_{x,t} = \ln(m_{x,t}) - \hat{a}_x$  la descomposición en valores singulares, donde  $Z_{x,t} = b_x^1 k_t$ , pudiendo obtener así los parámetros  $b_x^1$  y  $k_t$ . Para recalibrar así  $\hat{k}_t$  se estima realizar una serie de ajustes que permitan que el número total de fallecimientos en cada año coincida con el número que se estima de los mismos. Todo ello debido a que el modelo ajusta el logaritmo del tanto central de mortalidad y no el tanto central de primeras (Lee, 2000).

Dicho esto, teniendo en cuenta ahora que los errores se distribuyen conforme a una Poisson y los dos primeros momentos de la variable aleatoria, representada por el número de fallecimientos a la edad  $x$  en el año  $t$ ,  $Y_{x,t}$ , vienen dados por las siguientes ecuaciones:  $E[Y_{x,t}] = E[m_{x,t} \cdot E_{x,t}]$  y  $Var[Y_{x,t}] = \varphi E[Y_{x,t}]$  donde  $\varphi$  representa la sobredispersión.

De esta manera, el modelo de Lee-Carter quedaría expresado de la siguiente manera:

$$\ln(y_{x,t}) = \ln(E_{x,t}) + a_x + b_x^1 k_t \quad (2.4)$$

Dicho esto, para estimar los parámetros debemos de realizar el siguiente proceso, que consta de los siguientes pasos:

1. Hay que dar valores a  $\hat{\alpha}_x$  siguiendo la fórmula 2.4,  $\widehat{b}_x^1 = \frac{1}{K}$  y  $\widehat{k}_t = \frac{1}{K}$ , siendo  $K$  el número diferente de edades que se han considerado. Con esto, calculamos  $\hat{y}_{x,t}$ .
2. Se actualiza  $\hat{\alpha}_x$  y se calcula  $\hat{y}_{x,t}$  y  $D(y_{x,t}, \hat{y}_{x,t})$ . Previamente debemos de conocer el término *scaled deviance*, una medida de bondad global del ajuste entre los valores ajustados y observados  $D(y_{x,t}, \hat{y}_{x,t})$ , que, para el caso de la distribución de Poisson se expresa de la siguiente manera:

$$D(y_{x,t}, \hat{y}_{x,t}) = \sum_x \sum_t 2\omega_{x,t} \left\{ y_{x,t} \ln \left( \frac{y_{x,t}}{\hat{y}_{x,t}} \right) - (y_{x,t} - \hat{y}_{x,t}) \right\} \quad (2.5)$$

Donde  $\omega_{x,t}$  sería igual a uno si se cumple que en la ecuación 2.4  $E_{x,t}$  es estrictamente positivo y sería cero en caso que fuera estrictamente negativo.

3. Se actualiza  $\widehat{k}_t$  y se calcula  $\hat{y}_{x,t}$ .
4. Se actualiza  $\widehat{b}_x$  y calculamos  $\hat{y}_{x,t}$  y  $D(y_{x,t}, \hat{y}_{x,t})$ .
5. Siendo  $\eta$  un valor infinitesimal, hay que analizar la convergencia de  $\Delta D$ . Si resulta que  $\Delta D > \eta$  debemos de regresar al segundo paso. En caso de que sea menor, el proceso se para.
6. Alcanzada la convergencia, para garantizar que se cumplen las restricciones que tiene el modelo se re-escala  $\widehat{b}_x^1 = \frac{b_x^1}{\sum_x b_x^1}$  y  $\widehat{k}_t = \widehat{k}_t (\sum_x \widehat{b}_x^1)$ .

El mecanismo de actualización para un parámetro  $\theta$  se calcula aplicando a la función *deviance* el método de minimización de Newton-Raphson, expresándose del siguiente modo:

$$u(\hat{\theta}) = \hat{\theta} - \frac{\frac{\delta D}{\delta \theta}}{\frac{\delta^2 D}{\delta \theta^2}} \quad (2.6)$$

De acuerdo ahora a la familia generalizada del Modelo Lee-Carter, para la modelización de este estudio se realizará una modelización APC (*age-period-cohort*) y un ajuste del modelo de acuerdo a la metodología propuesta por Renshaw y Haberman

(2006), por lo que se hará mención especial al Modelo Renshaw-Haberman para entenderlo, previo a explicar la metodología de la predicción del tanto central de mortalidad.

Este último modelo del que se ha hablado nace como una extensión del modelo básico de Lee-Carter en el que se incluye un término bilineal adicional, introduciendo así el efecto de la cohorte como se muestra en la siguiente expresión:

$$\ln(y_{x,t}) = \ln(E_{x,t}) + a_x + b_x^0 Y_{t-x} + b_x^1 k_t \quad (2.7)$$

Donde  $a_x$  recoge el perfil principal de la mortalidad,  $Y_{t-x}$  y  $k_t$  indicarían el efecto de cohorte y el efecto de período, respectivamente, y  $b_x^0$  y  $b_x^1$  medirían las correspondientes interacciones con la edad.

Al ser una versión extendida, habrá que añadir una nueva restricción a las ya comentadas con anterioridad. En este caso, habría que añadir que  $\sum_x b_x^0 = 1$ .

Así pues, para la estimación de los parámetros, el anterior proceso mostrado se vería relativamente ajustado:

1. Se estima  $\hat{a}_x$  siguiendo la fórmula 2.4 y se dan los siguientes valores iniciales:  $\hat{b}_x^0 = \hat{b}_x^1 = \frac{1}{K}$  y  $\hat{k}_t = \frac{1}{K}$ , siendo  $K$  el número diferente de edades que se han considerado.
2. Con el objetivo de obtener valores iniciales para  $Y_z$  y  $k_t$ , se estima el modelo simplificado  $\ln(y_{x,t}) = (\ln(E_{x,t}) + a_x) + Y_z + k_t$  donde  $\ln(E_{x,t}) + a_x$  se tratará como una variable de exposición. Hecho esto, se calcula  $\hat{y}_{x,t}$  y  $D(y_{x,t}, \hat{y}_{x,t})$ .
3. Se actualiza  $\hat{Y}_z$  y se calcula  $\hat{y}_{x,t}$ .
4. Se actualiza  $\hat{b}_x^0$  y calculamos  $\hat{y}_{x,t}$ .
5. Se actualiza  $\hat{k}_t$  y se calcula  $\hat{y}_{x,t}$ .
6. Se actualiza  $\hat{b}_x^1$  y calculamos  $\hat{y}_{x,t}$  y  $D(y_{x,t}, \hat{y}_{x,t})$ .
7. Se analiza la convergencia de  $\Delta D$ . Si resulta que  $\Delta D > \eta$  debemos de regresar al tercer paso. En caso de que sea menor, el proceso se para.
8. Alcanzada la convergencia, para garantizar que se cumplen las restricciones que tiene el modelo se re-escala  $\hat{b}_x^0 = \frac{\hat{b}_x^0}{\sum_x \hat{b}_x^0}$ ,  $\hat{b}_x^1 = \frac{\hat{b}_x^1}{\sum_x \hat{b}_x^1}$  y  $\hat{k}_t = \hat{k}_t (\sum_x \hat{b}_x)$ .

Conocido el procedimiento para el modelo de Renshaw y Haberman, estamos en condiciones de conocer cómo se ha predicho el tanto central de mortalidad. Para ello, sólo nos bastará con predecir el índice  $k_t$ .

Para predecir pues series de tiempo, los modelos Lee-Carter usan como método más común de extrapolación los modelos ARIMA (modelo autorregresivo integrado de media móvil) univariado formado por tres parámetros (p;d;q). Tradicionalmente, para la realización de proyecciones de los tantos centrales por modelos de Lee-Carter se ha asumido un modelo ARIMA(0,1,0) donde  $k_t$  ha seguido un paseo aleatorio con constante, por lo que en nuestro estudio asumiremos dichas hipótesis (Wizani, 2019).

Dicho esto, supondremos una serie temporal  $k_{t_1}, \dots, k_{t_n}$  cuyo modelo de paseo aleatorio con constante vendría dado por la siguiente expresión:

$$K_{t_i} = k_{t_{i-1}} + \theta + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2) \quad i = 2, \dots, n \quad (2.8)$$

Donde  $\varepsilon_t$  es el ruido blanco en el proceso estocástico y  $\theta$  es la constante, donde el estimador sería  $\hat{\theta} = (k_{t_n} - k_{t_1}) / (n - 1)$  y de  $\sigma^2$  es  $\hat{\sigma}^2 = \sum_2^n (v_{t_i} - \hat{\theta})^2 / (n - 2)$ , siendo  $v_{t_i} = k_{t_i} - k_{t_{i-1}}$ . La varianza sería  $Var(\hat{\theta}) = \hat{\sigma}^2 / (n - 1)$  y, para terminar, la proyección de  $m$  períodos se calcularía como  $\tilde{k}_{t_{n+m}} = k_{t_n} + m\hat{\theta}$ , cuya varianza es  $Var(\tilde{k}_{t_{n+m}}) = s^2 Var(\hat{\theta})$ .

En el caso del modelo de Renshaw y Haberman, aparte de predecir  $k_t$ , se tendría que predecir un segundo índice  $Y_{t-x}$ , asumiendo que entre ambos hay independencia y que  $Y_{t-x}$  sigue un proceso de ruido blanco:

$$Y_{t-x} = Y_{t-x-1} + \theta + \Phi(Y_{t-x-1} - Y_{t-x-2}) + \varepsilon_{t-x} \quad \varepsilon_{t-x} \sim N(0, \sigma^2) \quad (2.9)$$

### 3.3 ESTIMACIÓN DE LA PROBABILIDAD DE FALLECIMIENTO

Una vez obtenidos los tantos centrales de mortalidad proyectados y las correspondientes probabilidades de fallecimiento calculadas conforme a la fórmula 1.4 del apartado 3.2 de este trabajo, nos ayudarán para readaptar estas últimas y poder compaginar con las probabilidades de fallecimiento utilizadas en la práctica aseguradora.

La metodología, por tanto, de la nueva  $q_x$  que vamos a calcular seguirá la línea propuesta a la de la elaboración de las tablas PERM/F-2000 y, también, de las ya actualizadas PER2020.

De este modo, la probabilidad de fallecimiento a una edad en concreto  $x$  y en un año determinado  $t$ ,  $q_{x,t}$ , es calculada como indica la siguiente expresión:

$$q_{x,t} = q_{x,t_0} \cdot e^{-\lambda_x(t-t_0)} \quad (3.1)$$

Donde  $q_{x,t_0}$  es la mortalidad de la que partiremos de base o probabilidad de fallecimiento en el año  $t_0$  y  $e^{-\lambda_x(t-t_0)}$  es el factor de proyección de la mortalidad, anticipando una menor mortalidad en el futuro.

Esta menor mortalidad de la que se habla es conseguida gracias al factor de mejora o tendencia,  $\lambda_x$ , que aparece en el factor de proyección (Mateos-Aparicio *et al.*, 2015). Para determinar estos factores de mejora, se han tenido en cuenta las diferentes tendencias de mortalidad para una edad concreta  $x$ , obtenidas estas mediante las distintas probabilidades de fallecimiento calculadas a partir de las proyecciones de los tantos centrales de mortalidad por la metodología Lee-Carter.

Según lo dicho, el factor de mejora para cada edad  $x$  vendría dado por el promedio de los distintos factores de mejora para una edad concreta  $x$ , de acuerdo a la siguiente expresión:

$$\lambda_x = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_{x,t_0+i}}{n} \quad (3.2)$$

Donde  $t_0$  representa, como ya se ha comentado anteriormente, el año base de cálculo,  $n$  el número de años máximo proyectados mediante la metodología Lee-Carter y  $\lambda_{x,t_0+i}$  la tendencia o factor de mejora para una edad concreta  $x$  y en un año  $t_0 + i$  determinado. Esta tendencia  $\lambda_{x,t}$  se calcula como:

$$\lambda_{x,t} = \frac{q_{x,t-1}}{q_{x,t}} - 1 \quad (3.3)$$

Siendo  $q_{x,t}$  la probabilidad de fallecimiento para una edad concreta  $x$  en un año  $t$  y  $q_{x,t-1}$  su homóloga en el año  $t-1$ . Para cualquier  $x$  en el año base  $\lambda_{x,t_0} = 0$ .

Análogamente, ya que el factor de mejora ha sido tradicionalmente calculado en la práctica aseguradora con datos históricos, se realizará este estudio también a objeto de comparar los resultados que se proporcionen en el plan de pensiones de acuerdo a la utilización de unos datos u otros.

El cálculo del factor de mejora es idéntico al mostrado en la función 4.2, tan sólo cambiaría el espacio temporal en el que se estarían estudiando los datos. De esta forma,  $n$  sería ahora el número de años pasados máximo utilizado, permaneciendo el resto de variables idénticas en significado y cálculo.

### 3.4 CONSTRUCCIÓN DEL PLAN DE PENSIONES PANEUROPEO

#### 3.4.1 Montante acumulado

El plan de pensiones que se construirá partirá de la idea de ser un plan de aportación definida, ya que el cliente será el que fije de antemano la cuantía que desea aportar mensualmente a su plan hasta el momento de su jubilación.

En estos planes, la prestación se calcula en el caso de que ocurra cualquiera de las contingencias que cubre el plan y lo que sí habrá que ir calculando en cada momento será el monto acumulado, no habiendo que aplicar para su cálculo métodos actuariales de financiación del coste actuarial (Gil, 2001).

Podemos definir este monto acumulado,  $SA_x$ , como el saldo de la cuenta individual capitalizado a la edad  $x$  del contribuyente, pudiendo calcularlo del siguiente modo:

$$SA_x = \sum_{i=0}^{n=m(x-x_0)} C_i \cdot (1 + r_{n-i}) \quad (4.1)$$

Donde  $C_i$  es la cuantía que se aporta mensualmente,  $m$  el número de períodos que van desde la edad en la que se empiezan las aportaciones por parte del cliente,  $m$  la periodicidad de las aportaciones (uno si es anual, doce si es mensual, dos si es semestral,

cuatro si es trimestral...),  $x_0$  hasta la fecha de valoración del monto,  $x$ , que, en caso de coincidir con la fecha de jubilación  $x = x_{jub}$ . Por último,  $r$  representaría el interés unitario obtenido en el momento de estudio  $n-i$  y que es calculado mediante procesos estocásticos de acuerdo al Reglamento Delegado (UE) 2021/473 de la Comisión de 18 de diciembre de 2020.

### 3.4.2 Renta vitalicia

Si el importe calculado en el anterior apartado,  $SA_x$ , se reconoce, llegado el momento de la jubilación, en forma de renta, debemos de igualar el valor actuarial de la renta, vitalicia en este caso, con esta suma, para conocer el valor que percibirá el cliente periódicamente.

Los términos de la renta vitalicia, teniendo en cuenta el valor financiero de una renta, deben de tener implícitos el carácter aleatorio que el fenómeno actuarial dota. De acuerdo ahora a si la renta vitalicia es **pospagable**,  $a_x$ , el valor al inicio de la cantidad a percibir viene multiplicado por un factor de descuento y la probabilidad de que el individuo sobreviva al período (Mateos-Aparicio *et al*, 2015).

Siendo este factor de descuento,  $V^k$ , para el capital disponible al final del  $k$ -ésimo período  $V^k = (1 + i)^{-k}$ ,  ${}_k p_x$ , la probabilidad de que un individuo de edad  $x$  llegue con vida a  $x+k$ , y  $l_\omega = 0$  los supervivientes a la edad máxima del colectivo, tenemos:

$$a_x = V p_x + V^2 {}_2 p_x + V^3 {}_3 p_x + \dots + V^{\omega-x-1} {}_{\omega-x-1} p_x + V^{\omega-x} {}_{\omega-x} p_x \quad (4.2)$$

Siendo esto igual a:

$$a_x = V \frac{l_{x+1}}{l_x} + V^2 \frac{l_{x+2}}{l_x} + V^3 \frac{l_{x+3}}{l_x} + \dots + V^{\omega-x-1} \frac{l_{\omega-1}}{l_x} + V^{\omega-x} \frac{l_\omega}{l_x} \quad (4.3)$$

Donde cada  $l_x$  sería el número de supervivientes a la edad exacta  $x$ , calculado a partir de la probabilidad de fallecimiento obtenida conforme al apartado 3.3 de este trabajo. Aparte de esto,  $i$  dentro de  $V^k$  representaría el tipo de interés técnico o máximo a aplicar para el cálculo de los planes de pensiones y que lo publica mediante Resolución la Dirección General del Seguro y Fondos de Pensiones, en adelante DGSFP.

Si en lugar de ser pospagable, la renta vitalicia fuera **prepagable**,  $\ddot{a}_x$ , el razonamiento no variaría con respecto a la renta pospagable. Lo que las difiere son los

vencimientos de cada prestación periódica. En lugar de ser a final de cada período, ahora tendrá lugar a comienzos del mismo. De esta forma:

$$\ddot{a}_x = 1 + Vp_x + V^2 {}_2p_x + \dots + V^{\omega-x-1} {}_{\omega-x-1}p_x + V^{\omega-x} {}_{\omega-x}p_x \quad (4.4)$$

Que, a su vez, desarrollando las probabilidades, quedaría de la siguiente manera:

$$\ddot{a}_x = 1 + V \frac{l_{x+1}}{l_x} + V^2 \frac{l_{x+2}}{l_x} + \dots + V^{\omega-x-1} \frac{l_{\omega-1}}{l_x} + V^{\omega-x} \frac{l_{\omega}}{l_x} \quad (4.5)$$

### 3.4.3 Rendimiento nominal de las inversiones

Para determinar el rendimiento nominal del PEPP de acuerdo a la norma, esta establece que los promotores del plan lo harán con arreglo a distintos enfoques estocásticos, donde tendrán que reflejar la estrategia de inversión realizada y las técnicas de reducción del riesgo.

Analizando los distintos elementos del modelo estocástico que se vaya a realizar, se deberá de utilizar la tasa anual de inflación y se podrá considerar la posibilidad de adoptar un enfoque de carácter modular para el cálculo, de manera estocástica, de, al menos, lo siguiente (Comisión Europea, 2020):

- Tipos de interés nominales
- Rendimiento de las acciones.
- Diferenciales de crédito (donde se incluyen los riesgos de migración e impago).

De acuerdo al primero de los puntos, se utilizará el modelo de tipos de interés instantáneos G2++, que sería el equivalente a utilizar el modelo de Hull-White de dos factores. Este modelo recoge también tipos de interés negativos por lo que su utilización refleja proyecciones más realistas.

Las ecuaciones para cada uno de los factores  $x(t)$  y  $y(t)$  vienen dadas por las siguientes expresiones:

$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dW_1^Q(t), x(0) = 0$$

(4.6)

$$dy(t) = -by(t)dt + \eta dW_2^Q(t), y(0) = 0$$

(4.7)

Como se puede ver, este modelo de dos factores depende de cuatro parámetros positivos,  $a$ ,  $b$ ,  $\sigma$ ,  $\eta$  y  $\rho$ , que sería el parámetro de correlación definido por:

$$dW_1^Q(t)dW_2^Q(t) = \rho dt$$

(4.8)

Donde  $W_1^Q$  y  $W_2^Q$  son procesos de Wiener correlacionados en la medida neutral al riesgo  $Q$ , aunque este riesgo requiere ser adaptado a condiciones reales  $P$ . Para ello, podemos hacernos con un precio de mercado que, como características, posea un riesgo constante e independiente en el tiempo. Para la adaptación a estas condiciones reales, utilizaremos el teorema de Girsanov:

$$dW_i^P = -\lambda_i dt + dW_i^Q, i = 1,2$$

(4.9)

Donde  $\lambda_i$  es el precio de mercado del riesgo. Ahora bien, si reestructuramos las fórmulas 4.6 y 4.7 conforme a la recientemente presentada, obtendríamos las siguientes expresiones:

$$dx(t) = (\lambda_1 \sigma - ax(t))dt + \sigma dW_1^P(t), x(0) = 0$$

(4.10)

$$dy(t) = (\lambda_2 \eta - by(t))dt + \eta dW_2^P(t), y(0) = 0$$

(4.11)

Con esto sabido, ya podemos dar respuesta al tipo de interés  $r$  utilizado en la fórmula 4.1 presentada, ya que los diferentes tipos de interés instantáneos  $r(t)$  vendrían dados por la suma de los dos factores en cada instante  $t$  y el desplazamiento  $\varphi(t)$ :

$$r(t) = x(t) + y(t) + \varphi(t)$$

(4.12)

Siendo  $\varphi(t)$  el resultado de:

$$\varphi(t) = f^M(0, T) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-aT})^2 + \frac{\eta^2}{2b^2} (1 - e^{-bT})^2 + \frac{\rho(\sigma\eta)}{ab} (1 - e^{-aT})(1 - e^{-bT}) \quad (4.13)$$

Donde  $f^M(0, T)$  se interpreta como el tipo de interés instantáneo del mercado en el momento cero y con horizonte T periodos.

El Reglamento sigue con el modelo G2++ planteado para dar solución analítica al precio de un bono cupón cero, que vendría a ser el resultado de la siguiente ecuación:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(a,t,T)x(t)-B(b,t,T)y(t)} \quad (4.14)$$

Donde  $P(t, T)$  sería el precio del bono en el modelo,  $B(z, t, T) := \frac{1 - e^{-z(T-t)}}{z}$  y  $A(t, T) := \frac{P^M(0, T)}{P^M(0, t)} e^{\frac{1}{2}[V(t, T) - V(0, T) + V(0, t)]}$  y, dentro de esta última ecuación  $P^M(t, T)$  representaría el precio de mercado de un bono cupón cero en el momento  $t$  con vencimiento  $T$  y  $V(t, T)$  se formularía del siguiente modo:

$$\begin{aligned} V(t, T) := & \frac{\sigma^2}{a^2} \left[ T - t + \frac{2}{a} e^{-a(T-t)} - \frac{1}{2a} e^{-2a(T-t)} - \frac{3}{2a} \right] \\ & + \frac{\eta^2}{b^2} \left[ T - t + \frac{2}{b} e^{-b(T-t)} - \frac{1}{2b} e^{-2b(T-t)} - \frac{3}{2b} \right] \\ & + \frac{2\rho(\sigma\eta)}{ab} \left[ T - t + \frac{e^{-(T-t)} - 1}{a} + \frac{e^{-b(T-t)} - 1}{b} - \frac{e^{-(a+b)(T-t)} - 1}{a + b} \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

Si nos trasladamos ahora a los diferenciales de crédito, se combinará la simulación de diferenciales de crédito con la estructura temporal de los bonos de cupón cero sin riesgo, obteniéndose así una estructura de estos bonos con riesgo. Las tasas de riesgo correspondientes a las diferentes categorías de riesgo crediticio se modelizarán de acuerdo a procesos CIR (Cox-Ingersoll-Ross).

Sabiendo que  $\lambda(t) = \lambda\sqrt{\pi_i(t)}$  es el precio de mercado del riesgo, la tasa de riesgo  $\pi_i$  evoluciona en condiciones reales de acuerdo a la siguiente ecuación estocástica:

$$d\pi_i(t) = (k\theta - (k + \lambda\sigma)\pi_i(t))dt + \sigma\sqrt{\pi_i(t)}dW_i^P(t), \pi_i(0) = \pi_{i,0} \quad (4.16)$$

Donde  $2k\theta > \sigma^2$  para que en cualquier  $t$ ,  $\pi(t)$  sea positiva y el valor de la  $i$  dependerá de la calificación de los bonos, siendo  $i = 1$  para categorías de calificación AAA e  $i = 5$  para categorías AA, A, BBB y BB.

Pasado esto, los diferenciales,  $s_i(t, T)$  se determinarían de la siguiente manera:

$$s_i(t, T) = (\delta + (1 - \delta) \cdot p_i(t, T))^{\frac{1}{T}} - 1 \quad (4.17)$$

Donde  $\delta$  determina la tasa de recuperación,  $T$  el vencimiento,  $t$  el momento de cálculo y  $p_i(t, T)$  las probabilidades de impago que se calculan a partir de la siguiente fórmula:

$$p_i(t, T) = \prod_{i=1}^i P_i(t, T) = \prod_{i=1}^i A_j(t, T) e^{-B_j(t, T) \pi_j(t)} \quad (4.18)$$

Siendo  $P_i(t, T)$  los diferentes precios CIR y  $A_i(t, T)$  y  $B_i(t, T)$  el resultado de las siguientes ecuaciones:

Para  $h_i = \sqrt{k_i^2 + 2\sigma^2}$ :

$$A_i(t, T) = \left[ \frac{2h_i e^{\frac{(k_i+h_i)(T-t)}{2}}}{2h_i + (k_i + h_i)(e^{(T-t)h_i} - 1)} \right]^{\frac{2k_i\theta_i}{\sigma_i^2}} \quad (4.19)$$

$$B_i(t, T) = \frac{2(e^{(T-t)h_i} - 1)}{2h_i + (k_i + h_i)(e^{(T-t)h_i} - 1)} \quad (4.20)$$

Si nos pasamos ahora a determinar el rendimiento de las acciones, el promotor del plan paneuropeo podrá desarrollar, gracias a movimientos brownianos geométricos, el progreso de la cotización de un índice.

Este movimiento browniano geométrico satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

(4.21)

También pudiendo representarse como:

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right), t \geq 0$$

(4.22)

Donde  $\mu$  pertenece a los número reales,  $\sigma > 0$ ,  $S_0 > 0$  y  $W_t$  es el movimiento Browniano estándar. Matizar que, para resolver esta ecuación diferencial, tendremos que precisar del conocido como cálculo de Itô.

Obtenidos los rendimientos, la volatilidad del PEPP puede ser obtenida a partir de la desviación estándar de estos. Del mismo modo, mencionar que los promotores podrán decidir incorporar el efecto de la prima de riesgo de las acciones, teniendo en cuenta que, para su cálculo, a efectos del tipo de interés libre de riesgo a utilizar, podrá optarse por el tipo al contado a diez años de la curva del Banco Central Europeo o el Banco Central del país del promotor (Comisión Europea, 2021).

Para la búsqueda de esta prima de riesgo, es necesario saber que el promotor del PEPP puede utilizar la previsión de crecimiento a largo plazo de las ganancias obtenidas por acción para el cálculo de la tasa de crecimiento  $g$ .

El Reglamento (2021) establece que los flujos de efectivo se podrán obtener a partir del uso de la tasa de crecimiento durante cinco años, haciendo que el flujo de efectivo final sea perpetuo y que la tasa de crecimiento pase a ser el tipo de interés libre de riesgo.

Así pues, el valor del índice para el caso de modelos de dividendo descontados vendría dado por la siguiente expresión:

$$PV_{index} = \frac{\gamma P_0}{1 + E[R_m]} + \frac{\gamma(1 + g)P_0}{(1 + E[R_m])^2} + \frac{\gamma(1 + g)^2 P_0}{(1 + E[R_m])^3} + \frac{\gamma(1 + g)^3 P_0}{(1 + E[R_m])^4} + \frac{\gamma(1 + g)^4 P_0}{(1 + E[R_m])^5} + \frac{\gamma(1 + g)^4 (1 + R_f) P_0}{(1 + E[R_m])^5 \frac{E[R_m] - R_f}{E[R_m] - R_f}}$$

(4.23)

Siendo  $E[R_m]$  la rentabilidad esperada del mercado,  $R_f$  el tipo de interés libre de riesgo,  $PV_{index}$  el valor actual del índice y  $P_0$  el precio del índice en el momento inicial. Ahora ya, si igualamos estos dos últimos precios mencionados, podemos despejar la rentabilidad esperada del mercado y, a partir de esta, obtener la prima de riesgo de las acciones como la diferencia entre esta rentabilidad esperada y  $R_f$ .

#### 3.4.4 Tasa de inflación

Para la modelización de la tasa de inflación en cualquier momento  $t$ , la normativa propone el uso del Modelo de Vasicek:

$$di(t) = \mu(t, i(t))dt + \sigma(t, i(t))dW(t) \quad (4.24)$$

Siendo, como ya sabemos,  $W(t)$  un movimiento browniano o proceso de Wiener y  $\mu$  y  $\sigma$  funciones deterministas apropiadas relacionadas con la tendencia y la volatilidad de, en este caso, la inflación.

Este modelo parte de la idea de que la inflación tendería de forma regresiva hacia un valor fijo que determinaría el valor estable de la propia inflación, conocido comúnmente esto como modelo de regresión a la media (Tamarit, 2013).

Utilizado exitosamente para modelizar los denominados tipos de interés *short-term* o en el corto plazo, aquí nos ayudará a determinar la previsión en el corto de plazo de la inflación. Para esto, se tendrá que tener en cuenta el nivel objetivo que el BCE se ha fijado en términos de inflación para la zona euro y las desviaciones que esta pueda tener o, en su defecto, para un Estado no miembro, el objetivo fijado por su respectivo banco central.

Este objetivo será el utilizado para la calibración del modelo y para la obtención de la desviación al largo plazo, considerándose como largo plazo, de acuerdo a la legislación, cien años, teniéndose así en cuenta la serie temporal de carácter mensual de la tasa interanual de inflación propia del Índice de Precios de Consumo Armonizado (IPCA).

### 3.4.5 *Tendencia salarial y costes del plan*

Los promotores del PEPP si desean tener en cuenta las tendencias salariales futuras examinarán, gracias a los datos proporcionados por Eurostat, el crecimiento de los salarios reales de los distintos Estados miembros con la hipótesis de que durante los primeros años de un ahorrador en PEPP, por ser una etapa de crecimiento profesional, los salarios tendrán una tendencia alcista, mientras que en los últimos años se verán estancados, con un crecimiento menor o incluso un crecimiento negativo.

Para obtener diferentes escenarios acerca de las tendencias futuras que el salario del ahorrador pudiera experimentar, el promotor del PEPP planteará la siguiente ecuación cuadrática:

$$\text{Salario} = a(\text{Max} - \text{Edad})^2 + b \quad (4.25)$$

En dicha fórmula,  $a$  vendría de una distribución uniforme entre los valores -0,15 y 0,011;  $b$  sería otro coeficiente resultante de partir de que el índice salarial se sitúe en 100 a los 25 años de edad;  $Max$ , como en el caso de  $a$ , también se obtendría a partir de una distribución uniforme pero, esta vez, entre los valores 47 y 64, considerada esta la franja de edad en la que el salario podría experimentar su máximo valor; y, por último,  $Edad$  representaría la edad de nuestro ahorrador.

Por último, por su sencillez, se determinará cómo se extraen los costes incluidos en el plan y que deben de ser reflejados en ese *Documento de datos fundamentales* que ya se comentaba en el marco teórico.

El total de costes anuales, por tanto, deberá de incluir todos los costes incurridos y a falta de cobro en el plazo de doce meses. Para el cálculo del efecto compuesto de los costes, el Reglamento (2021) establece que estará basado en un período de acumulación con un espacio temporal de cuarenta años, cuyas aportaciones mensuales serán de 100 euros y el mejor de los escenarios para el capital acumulado.

## DATOS, HIPÓTESIS Y SOFTWARE

El estudio, que a continuación de este capítulo se presenta, ha necesitado del uso de diferentes bases de datos, durante una serie de años, para distintos países miembros de la Unión Europea. Concretamente se utiliza la información perteneciente al número de defunciones por edad  $x$  y el número de personas expuestas al riesgo de fallecimiento a la edad  $x$  durante el período 1990-2017 de los siguientes países: Alemania, Austria, Bélgica, Bulgaria, Eslovenia, España, Finlandia, Francia, Grecia, Italia, Lituania, Luxemburgo, Países Bajos, Polonia, Portugal y Suecia.

Toda esta información está disponible en el sitio web de Human Mortality Database (<https://www.mortality.org/>). En resumen, más de 350 millones de habitantes distribuidos entre los dieciséis países estudiados y para cada uno de los veintisiete años analizados en los que no se han tenido en cuenta microdatos, como ya se explicaba en la Metodología, relacionados con fechas exactas de fallecimiento de los individuos, flujos migratorios y variaciones residenciales. Asumiendo, por tanto, como hipótesis, la distribución uniforme de las fechas de cumpleaños y de los fallecimientos para el cálculo de la tasa de mortalidad paneuropea.

A partir de las bases de datos comentadas se han realizado diferentes hipótesis para la obtención de los resultados que, a continuación de este punto, se van a presentar. Así pues, para el caso de la creación de la tabla de mortalidad paneuropea con base 2016, se ha establecido el suceso de muerte segura en la edad  $\omega$ , correspondiente en este caso para la edad de 110 años o más. Del mismo modo, las probabilidades de fallecimiento paneuropeas proyectadas, calibradas de acuerdo al cálculo realizado en las tablas PERM, cuyo uso servirá para estimar los diferentes supervivientes a la edad  $x$ ,  $l_x$ , que usaremos para la realización del plan de pensiones, tienen una edad  $\omega$  de 100 años, condicionada ésta por el límite de datos que soportaba la función predictora de las tasas de mortalidad del modelo de Lee-Carter.

Al tener que reducir a un nuevo límite, se ha considerado el fijar la edad a 100 años, todo ello de acuerdo a la metodología proporcionada por el Instituto Nacional de Estadística en mayo de 2016 para el cálculo de las tablas de mortalidad de España, donde se establece la edad de 100 años o más como la edad del suceso seguro de muerte.

En resumen, para la tabla de mortalidad paneuropea que se presentará, la edad  $\omega$  se establece en 110 años y para las tablas proyectadas utilizadas en el cálculo de las

prestaciones del plan, esta edad se limitará a 100 años, sabiendo que ambas tienen por base el año 2016. No obstante, se verá con mejor detalle en el capítulo Resultados.

Relacionado con el cálculo de  $q_x$  de acuerdo a las tablas PERM, ya se especificaba en capítulos anteriores la necesidad de crear diferentes factores de mejora. Asimismo, a objeto de comparar la repercusión en los resultados del uso de datos históricos o datos proyectados para el cálculo de estos factores, se han tomado como datos históricos los correspondientes al período 1990-2016 y como datos proyectados los obtenidos mediante el modelo de Lee-Carter y el año base para modelizar, albergando datos para el período 2016-2056, teniendo en cuenta que no se han aplicado posteriores recargos de seguridad.

Atendiendo ahora al cálculo de las aportaciones y prestaciones de los planes de pensiones paneuropeos, se han determinado lo que se denominarán *hipótesis cero*. Esto viene a decir que, a efectos de simplicidad, se han considerado cero las siguientes variables que, como hemos comentado en la Metodología, repercutirían en los cálculos del plan: rendimiento de las acciones, diferenciales de crédito e inflación. Así como, tampoco se tendrán en cuenta las tendencias salariales futuras y los costes incurridos.

Estas hipótesis cero se han supuesto tras reflexionar acerca de la evolución actual de la normativa que tiene en cuenta los planes de pensiones paneuropeos, aún en proceso. Las entidades que ya contemplan estos planes entre su cartera de productos son todavía minoritarias, por no decir inexistentes, por lo que, entre la inseguridad ante un posible cambio en la normativa y la poca práctica que hay en el mercado asegurador, se ha preferido considerar como cero la evolución de las variables planteadas.

Algo que sí se ha tenido en cuenta es la modelización estocástica de los tipos de interés a considerar a partir de la metodología de G2++ o Hull-White con dos factores. Para la calibración de este modelo se han usado bases de datos integradas en la propia herramienta donde se ha trabajado (Matlab) acerca de curvas de renta fija, parámetros de calibración y volatilidades, todas ellas datadas en el año 2017. Este año ha sido seleccionado por ofrecer unos resultados más favorecedores en relación a los que se podrían haber obtenido con los datos de tipos de intereses de 2021, implicando la mala tendencia del mercado actualmente. En consonancia con los datos escogidos para la inversión, se tendrá en cuenta para la elaboración de los planes de pensiones también el tipo de interés técnico aplicable en el año 2017 en España, establecido en un 1,30%. Se

ha seleccionado este país como referencia ya que no se cuenta con un dato específico a nivel paneuropeo.

Por último, el tratamiento de los datos y los diferentes cálculos realizados, en su mayoría, han sido realizados con R, un software libre y de código abierto para la ciencia de datos (R versión 4.1.0 de 2018) y con Matlab, una plataforma de programación y cálculo numérico. Asimismo, para la realización de los cálculos de las aportaciones y prestaciones que sostienen el plan de pensiones creado, así como la elaboración de algunas de las imágenes presentadas en este trabajo y la disposición o formato de las bases iniciales de partida, se ha utilizado Microsoft Office Excel.

Mencionar que el hecho de utilizar diferentes softwares es debido al mejor uso o la simplicidad que se tenía para los diferentes estudios realizados. No obstante, todos los programas utilizados son manejados en la práctica diaria entre la comunidad científica y, dentro de ésta, en el campo actuarial, suponiendo con ello que los resultados obtenidos no se van a ver mermados por el empleo de diversas herramientas de estudio.

## RESULTADOS

### 5.1 DATA EXPLORATORY ANALYSIS

La continua mejora de la longevidad en los países de la Unión Europea está afectando de manera importante a la industria del seguro. Especialmente, las consecuencias están siendo significativas en aquellas compañías que ofrecen, entre su cartera, productos relacionados con ahorro donde las prestaciones se dan en forma de rentas vitalicias puras, sin contraseguro.

El PEPP, como ya comentábamos a lo largo del Marco Teórico, nace con la necesidad de poner freno a este problema, entre otros muchos. Su carácter transfronterizo y la peculiaridad que tiene el ahorrador de poder estar aportando a un plan creado por un promotor de un Estado miembro distinto del Estado miembro del que es residente, confiere al análisis de estos novedosos planes la inquietud de estudiar la longevidad en los diferentes países de la Unión.

Por ello, lo que se realizará en primer lugar será la selección de los diferentes datos con los que vamos a tratar. Aunque la respuesta aquí es evidente, ya que los datos estarán conformados por la población perteneciente a los países miembros de la Unión Europea, las limitaciones presentadas ante la falta de datos de todos los países que pertenecen y la sobrecarga por exceso de información en las herramientas en las que trabajaremos, nos harán cuestionar el seleccionar dieciséis países que creamos más convenientes para la representación más completa posible de toda la población residente en la Unión.

Así pues, atendiendo a diferentes categorías que iremos comentando, se ha considerado el estudio de la población que conforma los siguientes países ya comentados en el anterior capítulo: Alemania, Austria, Bélgica, Bulgaria, Eslovenia, España, Finlandia, Francia, Grecia, Italia, Lituania, Luxemburgo, Países Bajos, Polonia, Portugal y Suecia, obteniendo desde la Human Mortality Database los datos relativos a defunciones y población expuesta para cada uno de ellos, entre los períodos 1990 y 2017, siendo este el periodo coincidente en el cual todos los países estudiados contaban con información.

Los países pioneros o que comenzaron a dar forma a lo que en un futuro sería la Unión Europea fueron Alemania, Bélgica, Francia, Italia y Luxemburgo. De esta manera,

al ser países que han constituido las bases de la Unión, se ha creído interesante su inclusión dentro del estudio. Bien hay que decir que, este criterio no será la variable de peso para la selección. Para ello, se han considerado los estudios realizados por el periódico *Expansión* (2021) y el Instituto Santa Lucía (2016), que ya mencionamos en el Marco Teórico, y la distribución geográfica de los distintos países miembros.

De acuerdo ahora a ese primer estudio comentado, en él se analizan diferentes variables para cada uno de los países de la Unión, como son: el número de población, el PIB anual, el PIB per cápita, el IDH (*Índice de desarrollo humano*), la deuda por país (% PIB) y el déficit (% PIB). Todos estos datos con fecha de análisis a cierre del año 2020.

Así pues, se han tenido en cuenta el Top 5 de los países de la Unión más poblados (Alemania, Francia, Italia, España y Polonia) por albergar así una mayor cantidad de muestra y por lo tanto una mayor representatividad de la población europea. También se ha tenido en cuenta el PIB per cápita, seleccionando los países con mayor y menor cifra en lo que a esta variable se refiere. Es por ello que Luxemburgo, aunque ya estaba incluido por ser uno de los países fundadores, refuerza su permanencia entre los países seleccionados por ser el país con mayor PIB per cápita. Resultados no tan favorables son los que presenta Bulgaria, que ha sido seleccionado por ser el país con el menor valor.

Una variable muy interesante que proporciona este estudio es el IDH. Esta variable tiene un valor más alto cuanto mayor sea la esperanza de vida, mayor sea el nivel de educación de su población y mayor el PIB nacional (Wikipedia, 2021). De esta manera, encontramos a Irlanda liderando el ranking, seguido de Alemania, Suecia y Países Bajos. A la cola de este ranking, encontramos, de nuevo, a Bulgaria.

El caso de Irlanda es interesante mencionar, ya que este país no ha sido seleccionado entre los países de estudio a pesar de poseer las características idóneas, ya que sus bases de datos contenían numerosos sesgos y falta de información actualizada en la fecha en la que se produjo la selección de datos, no pudiendo coincidir con los períodos de estudio del resto de países.

Regresando de nuevo al estudio de las diferentes variables para la selección, Portugal, España, Italia y Grecia serían los países seleccionados de acuerdo a una mayor deuda sobre el PIB. El hecho de que aparezcan normalmente los países que ya tenemos seleccionados en las variables estudiadas, nos hará pasar a analizar el estudio de las ofrecidas por el Instituto Santa Lucía.

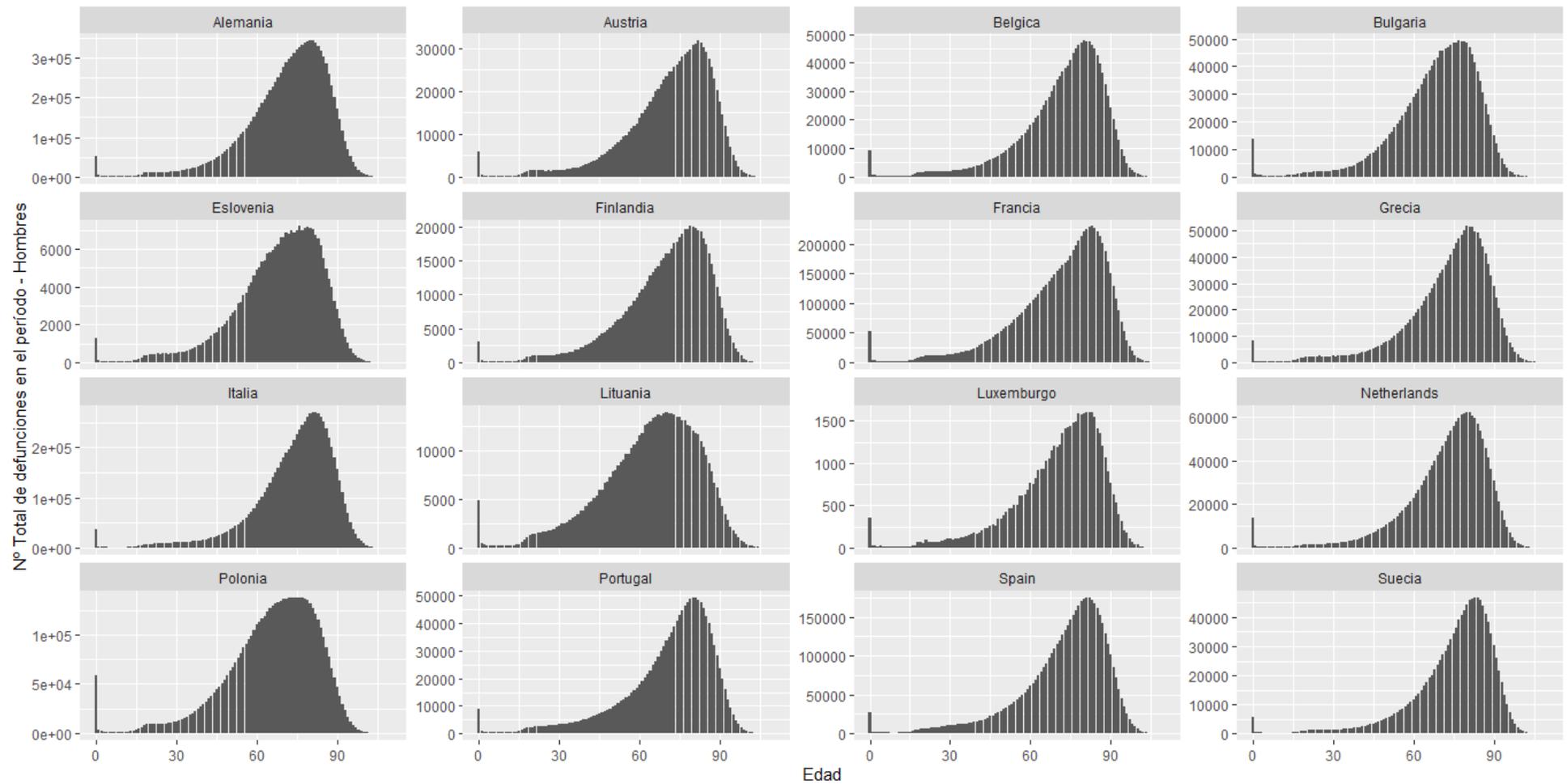
De esta manera, se seleccionarán a países como Eslovenia y Lituania por presentar las menores esperanzas de vida respecto al resto de la Unión, así como, se seleccionará a Finlandia por ser el país que presentaba, a fecha de ese estudio, un menor ahorro a largo plazo.

Por último, se llevará a cabo un pequeño estudio sobre la disposición geográfica de los países en Europa, estimando la conveniencia de incluir diferentes países situados en distintos vértices del continente, ya que la ubicación es un factor también muy importante porque determina ciertos aspectos en la cultura de un país y la forma de vida que sus ciudadanos tienen.

Con esto dicho, y tras comprobar la ubicación de todos los países mencionados hasta el momento, a excepción de Irlanda, se ha decidido incluir un país más a la lista: Austria. Su ubicación estratégica en el centro de Europa, alineada con unos resultados paralelos a la media europea en las variables estudiadas en este punto, hacen a este país idóneo para ser el que cierre la lista de esos dieciséis países que albergarán, en porcentaje, el 86% del total de la población de la Unión Europea, contando así con una muestra bastante representativa social y económicamente hablando.

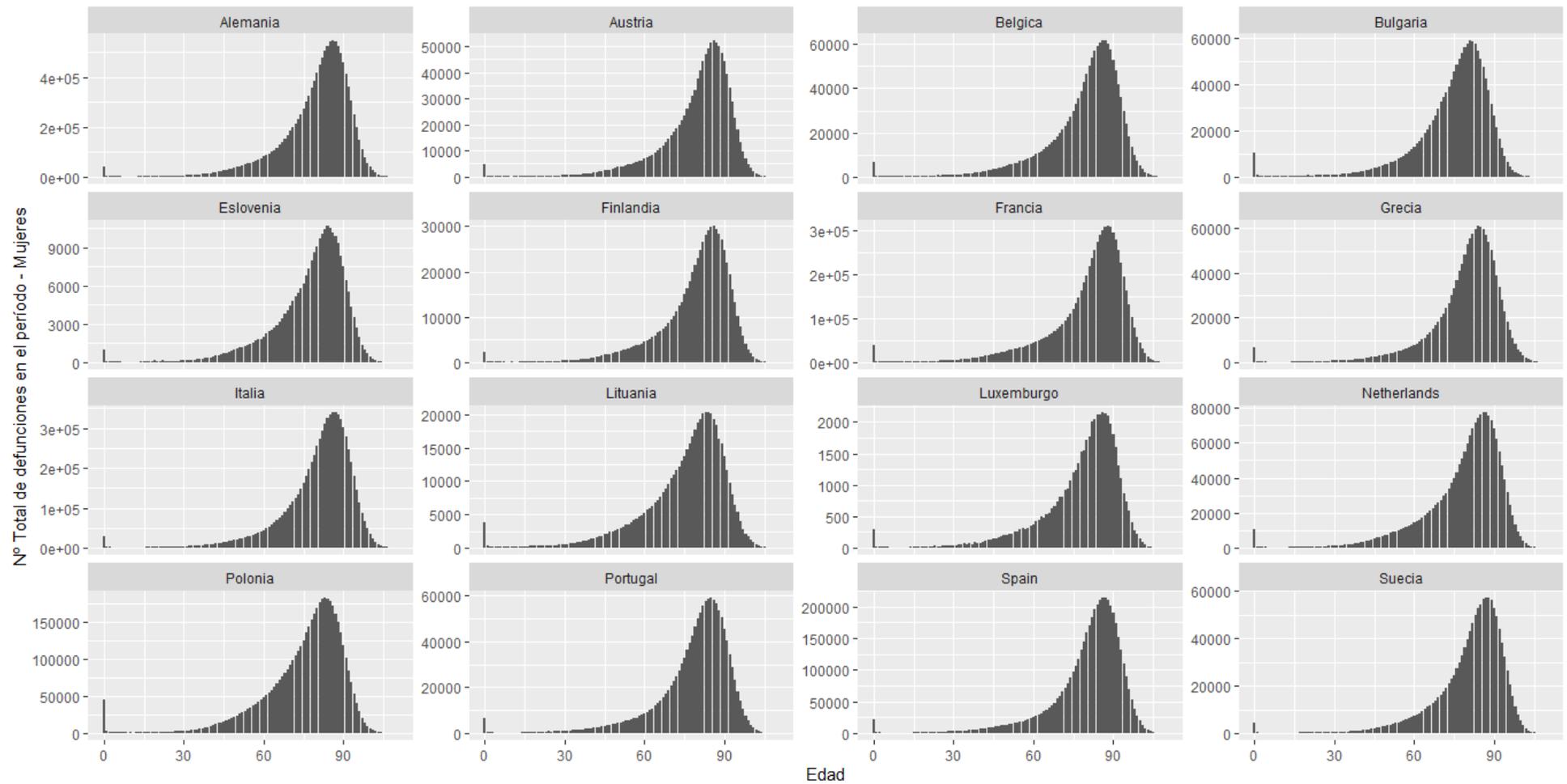
Teniendo ya la lista de países, pasamos a realizar un primer análisis de los datos con los que contamos. Como la información de los individuos expuestos por país no merece mayor interés que el situar qué país tiene más habitantes y qué país menos, pasaremos a ver el estudio de la distribución de las muertes totales acumuladas en el período 1990-2016.

La fecha de estudio se cierra en 2016 a partir de ahora, a pesar de tener información de 2017, ya que, según la fórmula 1.3, es necesario para el cálculo de cada  $m_x$  los datos poblacionales del año  $x + 1$ , haciendo así que tengamos que limitar la presentación de futuros resultados del trabajo a este año. De esta manera, nos adelantamos ya a esos acontecimientos. Con esto dicho, se presentan a continuación las distribuciones comentadas en el anterior párrafo tanto para hombres, como para mujeres.



**Figura 2.1.** Número de defunciones totales en hombres por país. Período 1990-2016.

*Fuente: Elaboración propia.*



**Figura 2.2.** Número de defunciones totales en mujeres por país. Período 1990-2016.

*Fuente: Elaboración propia.*

La primera de las ideas a nivel general que podemos encontrar tras visualizar estos gráficos es el desplazamiento del número de fallecimientos acumulados a edades más avanzadas, pudiendo decir así que la edad modal está presentando un desplazamiento a la derecha.

Seguidamente, algo también muy llamativo es la distribución de las propias muertes entre los hombres, donde se distribuyen de manera más proporcional durante todo el tramo de edad estudiado, mientras que los fallecimientos en las mujeres tienden a acumularse más al final de las edades mostradas. Esta es una característica presentada en todos los países analizados.

No obstante, sorprenden los datos proporcionados en países como Polonia, Bulgaria y Lituania, donde el total de fallecimientos en recién nacidos respecto a su población es bastante alto, haciendo con ello que los países del este europeo puedan condicionar de manera significativa el estudio de la mortalidad para edades prematuras.

Si nos fijamos ahora solo en el gráfico que ofrece los datos para hombres, es característico, en la mayoría de los países, el incremento de las muertes en edades comprendidas entre 18 y 30 años, algo que no ocurre con los datos ofrecidos para mujeres. Ello puede deberse a casos como el de Lituania o Polonia, donde los accidentes de tráfico entre jóvenes, generalmente varones, es algo a la orden del día. Esta situación es extendida a más países de la Unión que, a pesar de estar reduciendo sus tasas de mortalidad en este tipo de accidentes, el hecho de presentar datos acumulados para todo el período en los gráficos presentados, hace que históricamente el número de fallecidos ocasionados por este tipo de catástrofes se vea incrementado (Comisión Europea, 2020).

Siguiendo con el estudio de los resultados proporcionados para hombres y retomando la idea de la distribución más equitativa de las muertes que se comentaba al principio, es interesante ver que esta proporcionalidad no se presenta de igual manera para todos los países. Mientras que países como Lituania, Polonia y Eslovenia presentan una cierta equidad a lo largo de todas las edades, otros países como España, Italia o Suecia presentan gráficos muy similares, donde el cúmulo de fallecimientos se sitúa en edades más longevas.

Aunque en menor medida, esto que acabamos de comentar e incluso haciendo la comparativa con los mismos países, se puede trasladar al estudio que se presenta en la distribución de los fallecimientos en mujeres, reflejando con ello las diferencias entre los

distintos países de la Unión, donde las condiciones económicas y/o de vida no son, para nada, homogéneas.

Si recordamos ahora, los planes de pensiones paneuropeos nacían con el objetivo de unificar condiciones y poseer las mismas características u oportunidades para todos los países de la Unión. De acuerdo ahora a las últimas noticias de la Comisión Europea, esta no ha dejado claro aún algunos aspectos tan relevantes como qué tablas de mortalidad se emplearán para la creación de los planes, dejando así margen para que cada promotor utilice las tablas de mortalidad empleadas en el país de donde es miembro.

Este hecho, tras analizar los datos de las distribuciones de los fallecimientos totales por países, nos hace cuestionarnos la idea de que el ahorrador del PEPP, como consumidor final de este producto y sabiendo que puede contratar un plan en un Estado miembro distinto del Estado miembro del que es residente, lo valoren con una tabla de mortalidad que, probablemente, no refleje verdaderamente sus características, ya que, como hemos podido ver, se presenta una gran desproporcionalidad entre la distribución de las muertes para los diferentes países de la Unión, especialmente los países del Este.

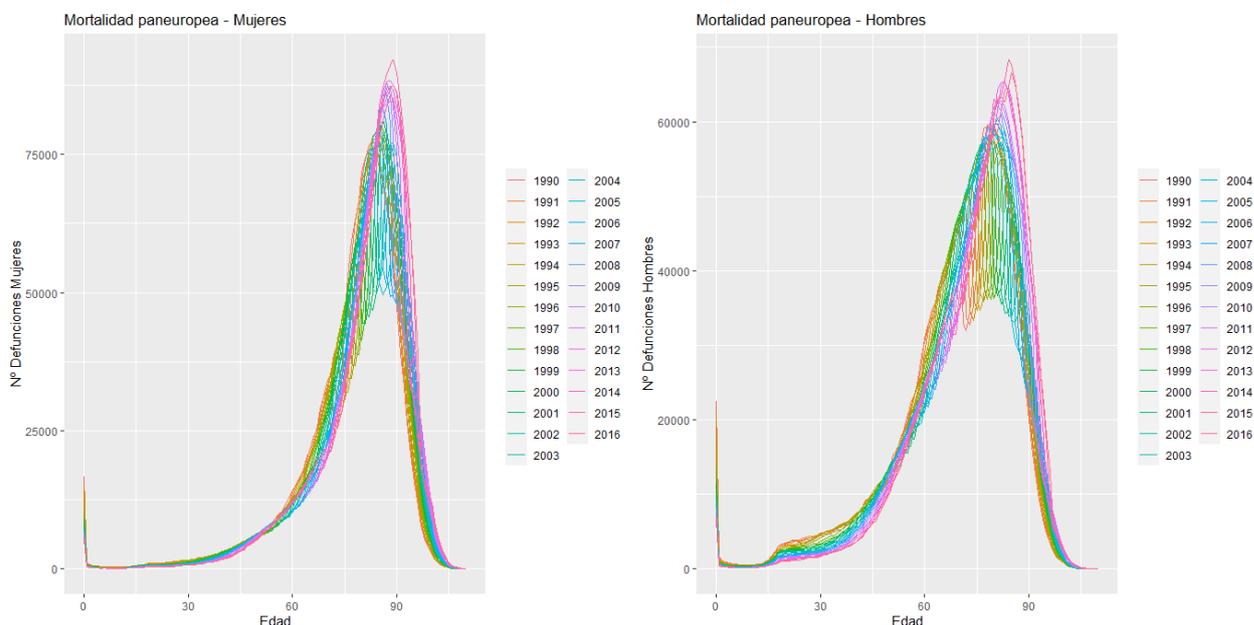
De esta manera, estaríamos en la línea con lo que se pretende desde la Unión Europea acerca de un proceso de normalización y uniformidad que inicialmente se planteaba y que se buscaba para la creación de estos nuevos planes. Estandarizando, de este modo, un producto que es igual para todos los europeos con unas bases de cálculo iguales para todos los europeos, de acuerdo a principios fundamentales para la creación de un seguro propiamente dicho, como son la distribución del riesgo y la solidaridad compartida.

## **5.2 TABLA DE MORTALIDAD PANEUROPEA**

Como se ha podido ver en el anterior apartado, la tabla de mortalidad paneuropea nacería con ese propósito de uniformidad acomodable tanto en la normativa, como en las bases de cálculo aplicables a todo el ámbito europeo. Ahora bien, para obtenerla, se deben de realizar aquellos cálculos que han sido previstos en la Metodología de este trabajo.

El primer paso que se tendrá que dar será el reestructurar las bases de datos de los diferentes países, aunando en un espacio los datos de los que se partirá para calcular la

tasa de mortalidad. De esta manera, podríamos ver ahora cómo se reparten las defunciones a lo largo del período de estudio 1990-2016 para la población europea seleccionada.



**Figura 2.3.** Número de defunciones paneuropeas en mujeres (izquierda) y hombres (derecha). Período 1990-2016.

*Fuente: Elaboración propia*

Al unificar la información se puede realizar un análisis mucho más detallado acerca de la evolución que ha ido presentando la mortalidad europea con el paso de los años. De esta manera, en diferentes tonalidades encontramos la representación de las defunciones por edad para cada año de la muestra.

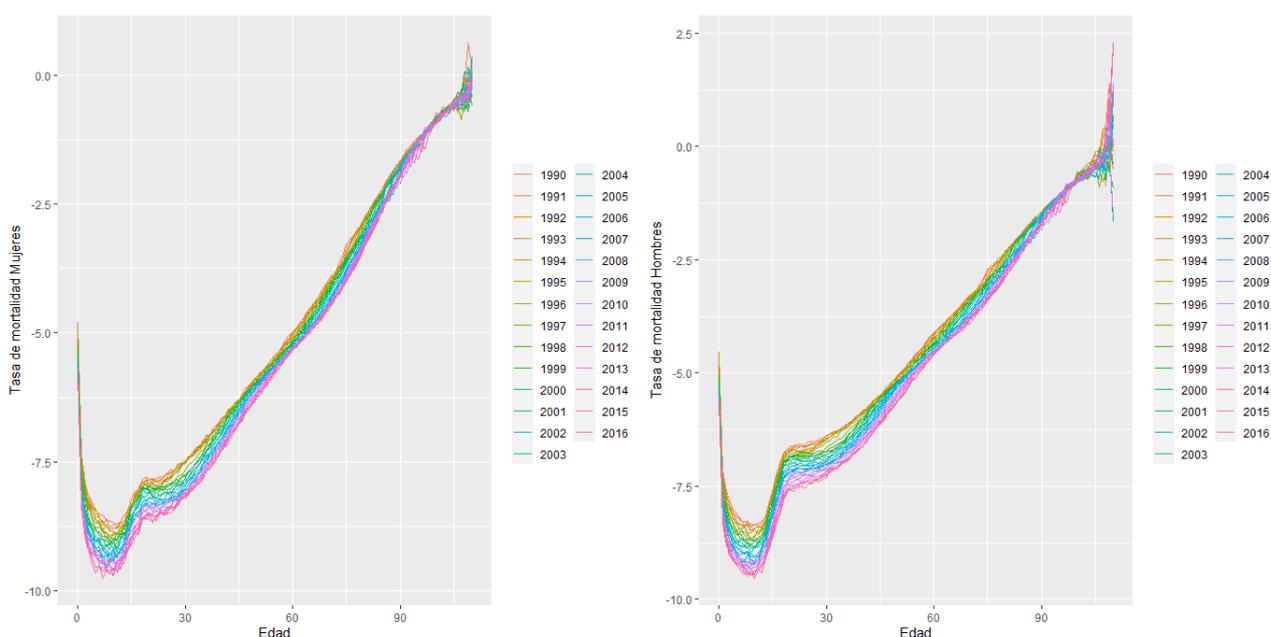
La primera de las características que se puede ver, pudiendo afirmar la hipótesis que se planteaba en el anterior apartado, es la elevada mortalidad que se produce entre los recién nacidos europeos, hecho condicionado por el alto número de defunciones en esta edad inicial entre los países del este europeo. No obstante, si profundizamos en este momento temporal, se puede ver como los datos más elevados fueron en los primeros años de estudio, mostrando unas menores cifras con el transcurso del tiempo.

Al igual que ocurría cuando se observaba la distribución de la mortalidad por países, aquí también podemos ver como las muertes en los hombres se distribuyen más a lo largo de las diferentes edades, apareciendo esos pequeños repuntes en edades comprendidas entre los 20 y 30 años, mientras que los datos presentados en las mujeres tienden a agruparse en torno a edades más longevas.

Otro aspecto que sí que podemos diferenciar de una forma clara en estos gráficos es el desplazamiento de la mortalidad, conforme pasan los años, a una edad cada vez más tardía tanto en hombres como en mujeres, destacando en tonos rosas los fallecimientos producidos en los últimos años, donde los picos de fallecidos recaen en edades muy superiores a los picos presentados en los primeros años de estudio (tonos marrones).

Antes de dar paso al siguiente análisis, previo a la presentación de las tablas de mortalidad, se quiere destacar que, sin realizar cálculos algunos, estos gráficos que acabamos de ver ya nos dan unos avances sobre el resultado que presentará la probabilidad de fallecimiento,  $q_x$ . Para hombres, por ejemplo, esta probabilidad será mucho mayor a la de las mujeres prácticamente durante todo el espacio temporal de las edades, a excepción del tramo que comprende entre los uno y diez años de edad, donde parecen estabilizarse y equipararse algo más las defunciones en ambos sexos.

Dicho esto, ya estamos en condiciones de estimar la tasa de mortalidad paneuropea. Para ello se necesitarán tanto los datos de las defunciones como los de los individuos expuestos para cada edad  $x$ . Una vez obtenida, la tasa  $m_x$  nos servirá como punto de partida para el cálculo del resto de variables, aunque antes haremos un breve análisis de la evolución de esta tasa.



**Figura 2.4.** Tasa de mortalidad paneuropea (log) en mujeres (izquierda) y hombres (derecha). Período 1990-2016.

*Fuente: Elaboración propia*

A objeto de mostrar una mejor y más razonable comparación, los datos de las diferentes tasas de mortalidad paneuropeas, calculadas para cada edad  $x$  en cada año  $t$ , se han estandarizado aplicando logaritmos.

Aquí ya podemos comprobar como la tasa de mortalidad para hombres,  $m_x$ , es mucho mayor que la tasa de mortalidad de las mujeres y que, efectivamente, llegan a equipararse en las edades comprendidas entre los 0 y 10 años, donde la mortalidad cae estrepitosamente después del pico presentado en el momento del nacimiento.

Con el paso de los años, esta tasa va disminuyendo para todas las edades en ambos sexos, pero tenemos que tener en cuenta y comprender que las ganancias obtenidas que esto conlleva en la esperanza de vida no son infinitas, sino que, ahora, el hecho de que desaparezcan los picos presentados por muertes agudas o neonatales, hará que se sustituya por el aumento de las muertes causadas por enfermedades crónicas o propias de edades más avanzadas, siendo el nuevo condicionante para la evolución futura de la mortalidad.

Todo ello sin tener en cuenta las muertes derivadas por catástrofes o pandemias, como la originada a finales de 2019 a causa del Covid-19, que, aunque no hayamos tenido en cuenta los datos de 2019 y 2020, estamos seguros que influirá de manera significativa en el estudio de la mortalidad futura de la población.

Ahora bien, con la información obtenida hasta el momento y con los diferentes estudios que han ayudado a comprender mejor la situación de la que partimos a nivel europeo, se pasa a presentar ya las tablas de riesgo biométrico paneuropeas.

Estas tablas, como cualquier otra tabla de mortalidad, son la base para el estudio de la longevidad y el cálculo de los seguros de vida y planes de pensiones de las compañías, siendo construidas, en la mayoría de los casos, a partir del número de individuos que alcanzan con vida la edad  $x$ ,  $l_x$ . Aparte, obviamente, de la tasa de mortalidad.

Se representan, por tanto, para una población ficticia inicial,  $l_0$ , que, en este caso, será de 100.000 individuos que reflejarán, como modelo, la incidencia de la mortalidad paneuropea. Con todo esto, se muestran a continuación las tablas de mortalidad paneuropeas de la generación de 2016, por ser el último año estudiado, para hombres y mujeres, respectivamente.

**Tabla 1.***Tabla de mortalidad paneuropea en Hombres. Base 2016.*

<i>Edad</i>	$q_x$	$p_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$e_x$
0	0.0037342	0.9962658	1.000000e+05	373.4231385	9.981329e+04	78.661199
5	0.0000990	0.9999010	9.956340e+04	9.8600278	9.955847e+04	74.002582
10	0.0000854	0.9999146	9.951898e+04	8.4946717	9.951473e+04	69.034566
15	0.0001749	0.9998251	9.946916e+04	17.3928753	9.946046e+04	64.067770
20	0.0005046	0.9994954	9.931233e+04	50.1174837	9.928728e+04	59.164223
25	0.0005760	0.9994240	9.905077e+04	57.0578412	9.902224e+04	54.313748
30	0.0006839	0.9993161	9.874781e+04	67.5382640	9.871404e+04	49.472564
35	0.0009318	0.9990682	9.835403e+04	91.6494626	9.830820e+04	44.660112
40	0.0013410	0.9986590	9.782730e+04	131.1894318	9.776171e+04	39.886370
45	0.0022000	0.9978000	9.702664e+04	213.4578393	9.691991e+04	35.193200
50	0.0036190	0.9963810	9.573499e+04	346.4682759	9.556176e+04	30.631596
55	0.0060413	0.9939587	9.360429e+04	565.4962458	9.332155e+04	26.267248
60	0.0099357	0.9900643	9.011783e+04	895.3827162	8.967014e+04	22.179669
65	0.0149543	0.9850457	8.491453e+04	1269.8360160	8.427961e+04	18.376978
70	0.0198066	0.9801934	7.789515e+04	1542.8405016	7.712373e+04	14.799392
75	0.0333586	0.9666414	6.870617e+04	2291.9427671	6.756020e+04	11.424946
80	0.0544716	0.9455284	5.599631e+04	3050.2105416	5.447120e+04	8.426679
85	0.0976198	0.9023802	3.918843e+04	3825.5666951	3.727565e+04	5.929469
90	0.1636597	0.8363403	2.045805e+04	3348.1589184	1.878397e+04	4.099263
95	0.2571740	0.7428260	6.656375e+03	1711.8465429	5.800452e+03	2.876683
100	0.3818909	0.6181091	1.176748e+03	449.3891319	9.520530e+02	1.881450
105	0.5216095	0.4783905	6.781563e+01	35.3732789	5.012899e+01	1.261897
110+	1.0000000	0.0000000	3.922130e-02	0.0392213	1.961070e-02	0.500000

*Nota:* Esta tabla muestra, por orden, los datos pertinentes a la probabilidad de fallecimiento,  $q_x$ , la probabilidad de supervivencia,  $p_x$ , el número de individuos que llegan con vida a la edad  $x$ ,  $l_x$ , el número de defunciones teóricas a la edad  $x$ ,  $d_x$ , la población censal a la edad  $x$ ,  $L_x$  y la esperanza de vida que tendría un individuo con edad  $x$ ,  $e_x$ .

**Tabla 2.***Tabla de mortalidad paneuropea en Mujeres. Base 2016.*

<i>Edad</i>	$q_x$	$p_x$	$l_x$	$d_x$	$L_x$	$e_x$
0	0.0030174	0.9969826	100000.0000	301.737503	99849.131248	84.082791
5	0.0000932	0.9999068	99643.4172	9.285890	99638.774206	79.380745
10	0.0000699	0.9999301	99607.5519	6.964135	99604.069797	74.408496
15	0.0001154	0.9998846	99568.8275	11.494407	99563.080312	69.436388
20	0.0001818	0.9998182	99493.5153	18.085758	99484.472424	64.486862
25	0.0002020	0.9997980	99398.2284	20.079674	99388.188585	59.546212
30	0.0003054	0.9996946	99280.4771	30.315470	99265.319366	54.613698
35	0.0004127	0.9995873	99113.4600	40.904385	99093.007839	49.701269
40	0.0006832	0.9993168	98864.8002	67.545052	98831.027662	44.819538
45	0.0011554	0.9988446	98457.7578	113.759610	98400.877965	39.993641
50	0.0018954	0.9981046	97758.5854	185.291651	97665.939529	35.260362
55	0.0030573	0.9969427	96638.3159	295.453885	96490.588952	30.638044
60	0.0048337	0.9951663	94860.7238	458.529610	94631.459023	26.162194
65	0.0072828	0.9927172	92207.4783	671.527252	91871.714668	21.838735
70	0.0103024	0.9896976	88378.6030	910.508672	87923.348695	17.670989
75	0.0182551	0.9817449	82676.5783	1509.266290	81921.945113	13.704027
80	0.0342373	0.9657627	73477.3857	2515.670121	72219.550606	10.082611
85	0.0698741	0.9301259	58107.7484	4060.226308	56077.635252	7.038203
90	0.1324968	0.8675032	35950.6970	4763.353277	33569.020330	4.785152
95	0.2170662	0.7829338	14538.7881	3155.879371	12960.848436	3.340430
100	0.3332574	0.6667426	3489.4810	1162.895204	2908.033424	2.177600
105	0.4322813	0.5677187	312.1584	134.940220	244.688273	1.637072
110+	1.0000000	0.0000000	10.4618	10.461797	5.230899	0.500000

*Nota:* Esta tabla muestra, por orden, los datos pertinentes a la probabilidad de fallecimiento,  $q_x$ , la probabilidad de supervivencia,  $p_x$ , el número de individuos que llegan con vida a la edad  $x$ ,  $l_x$ , el número de defunciones teóricas a la edad  $x$ ,  $d_x$ , la población censal a la edad  $x$ ,  $L_x$  y la esperanza de vida que tendría un individuo con edad  $x$ ,  $e_x$ .

Antes de comentar los resultados ofrecidos en las diferentes tablas de mortalidad, se quiere mencionar el hecho de que, para ahorrar espacio y presentar unos datos más ordenados y clarificadores, se ha decidido mostrar los resultados de la tabla para aquellas edades múltiples de cinco que van desde la edad inicial 0 hasta la edad límite u omega 110, incluidas también estas últimas entre las edades presentadas.

Pasando ya al análisis, nos ayudaremos de un estudio expuesto en la web del Instituto de Estadística de Cataluña (Idescat, <https://www.idescat.cat/>), donde se muestran los datos relativos a la esperanza de vida al nacer, por sexo y por año, de los individuos de la Unión Europea-27 (UE-27). Esta información nos permitirá comparar con la obtenida en nuestras tablas de mortalidad.

De esta forma, según los cálculos realizados a partir de las distintas hipótesis planteadas, se tiene, según nuestros datos, una esperanza de vida al nacer para hombres de 78,6 años, mientras que para mujeres esta ascendería a 84,0. Si nos vamos ahora al estudio proporcionado por el Idescat (2020) y seleccionamos los datos referentes a 2016, la esperanza de vida al nacer para un hombre miembro de la UE-27 se sitúa en los 78,0 años y, el mismo dato, pero para mujeres pertenecientes a la UE-27, alcanza la cifra de 83,7 años.

Esto nos viene a decir que, de estar bien los cálculos realizados por esta organización y suponiendo que esta haya utilizado unas hipótesis diferentes a las utilizadas en este estudio, el margen de error para la esperanza de vida al nacer se emplazaría en 0,6 años en los hombres y 0,3 años en las mujeres. Dado que nuestra muestra no cuenta con los 27 países que conforman la Unión por las limitaciones ya citadas, se cree bastante significativo, por su proximidad, el valor extraído en nuestros cálculos.

Reiterar el hecho de las hipótesis utilizadas en cada estudio para los cálculos, ya que, por ejemplo, para nuestra tabla de mortalidad paneuropea se ha supuesto que la mortalidad se distribuye uniformemente a lo largo del año, dando constancia de esto el último dato mostrado en ambas tablas para la esperanza de vida a la edad  $\omega$ , situándose en 0,5 años estimados de vida. Al no saber qué hipótesis han considerado desde el Idescat no podemos discriminar unos u otros resultados, dando por válidos ambos.

Por último, como cierre a este punto, destacar que, gracias a las tablas, ya podemos conseguir una visión más numérica de la mortalidad paneuropea, viendo, por poner un ejemplo, como las mujeres que llegan con vida a la edad máxima son unas 10, dentro de los 100.000 individuos ficticios inicialmente planteados, mientras que los hombres no conseguirían siquiera un individuo con vida al inicio de la edad última, destacando con ello esa mejora en la mortalidad de las mujeres que llevamos viendo a lo largo de todo este trabajo.

### 5.3 PROYECCIÓN DE LA MORTALIDAD

Obtenidas ya las tablas de mortalidad paneuropeas, serán estos datos los que utilizaremos como base para el cálculo de las probabilidades de fallecimiento,  $q_x$ , de acuerdo a la fórmula prevista en el capítulo de Metodología (fórmula 3.1) y que hace referencia al cálculo usado en la práctica aseguradora para las tablas PERM o las ya actualizadas PER2020.

En base a esta búsqueda de las diferentes  $q_x$  para las distintas edades y años a proyectar, se es necesario, como bien es sabido ya, la obtención de los factores de mejora. Es aquí, en este punto, donde trataremos brevemente la metodología Lee-Carter para el cálculo de las proyecciones que nos proporcionarán una tendencia de la mortalidad a futuro y, a partir de la variación de esta tendencia entre años y el promedio para cada una de las edades, obtendremos el factor de mejora que necesitamos. También, a efectos comparativos, se calculará ese promedio de la mejora presentada en la probabilidad de fallecimiento entre un año y otro para los datos históricos con los que contamos.

Dado que las nuevas tablas proyectadas que vamos a crear van a ser usadas para ejemplificar ahorradores estándar de un PEPP básico y analizar la longevidad de estos una vez alcanzan la etapa pasiva en la que la empresa debe de iniciar los desembolsos, nos centramos para el caso concreto de la estimación de la esperanza de vida en personas con edad 65 años, que será la edad en la cual se inician las prestaciones por parte de la empresa. Los paquetes concretos usados para el análisis en R han sido *demography* e *ilc*, complementados con *forecast*.

A continuación, se pasa a mostrar los gráficos que representarán los diferentes parámetros estimados del modelo de Lee-Carter que ya se hablaron en el capítulo de Metodología (para más información, redirigir a la página 22).

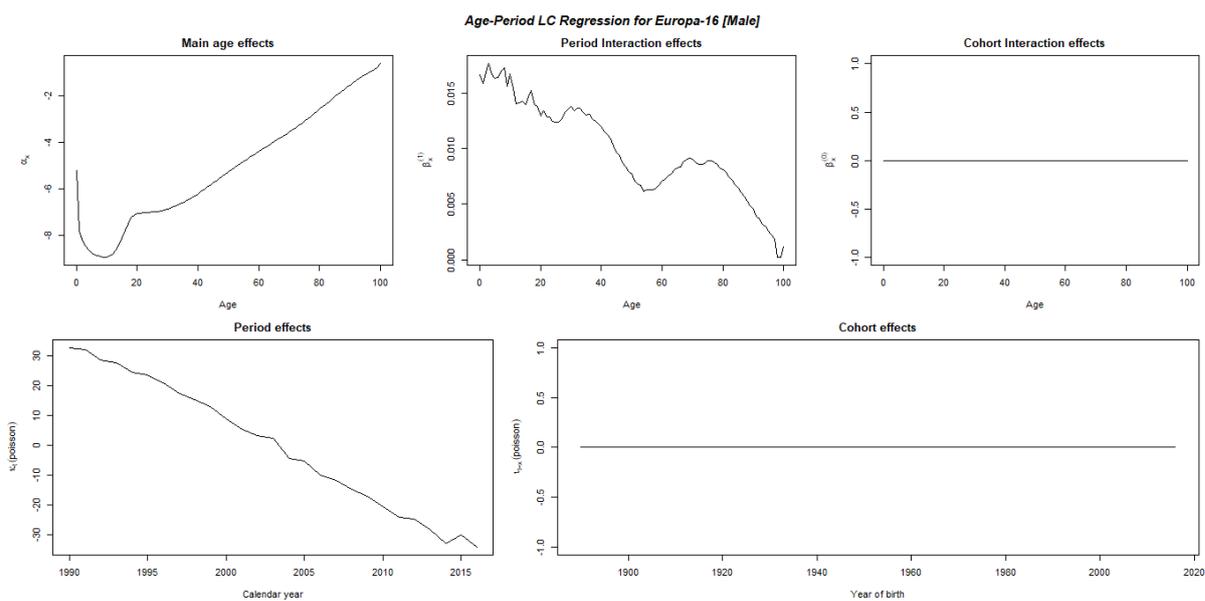


Figura 2.5. Parámetros estimados del modelo Lee-Carter para hombres.

Fuente: Elaboración propia

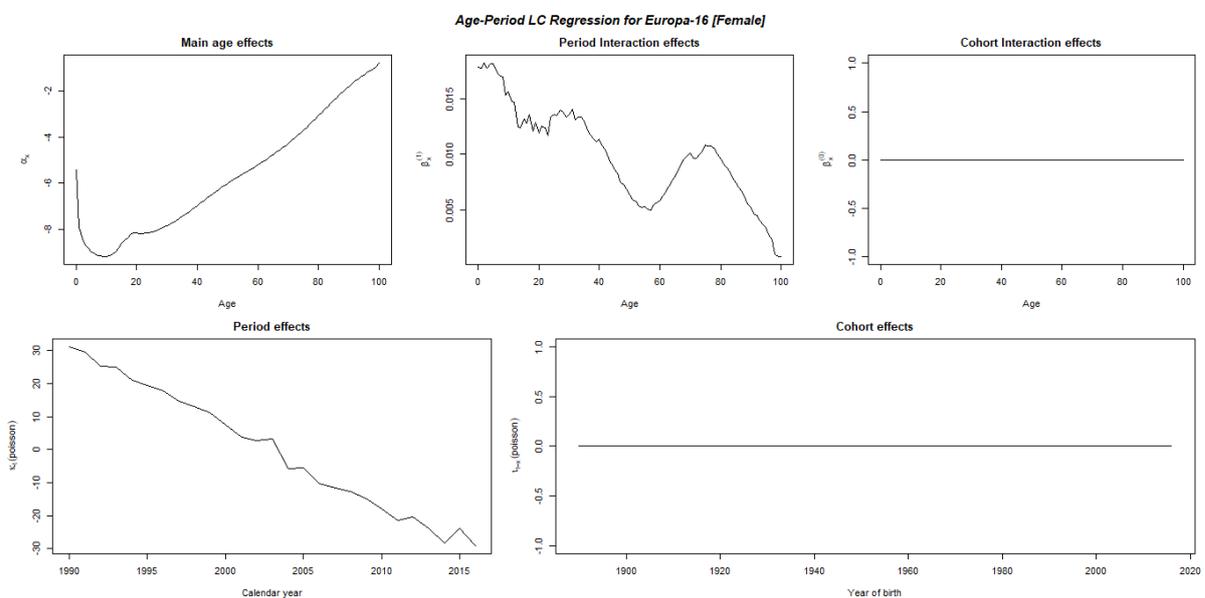


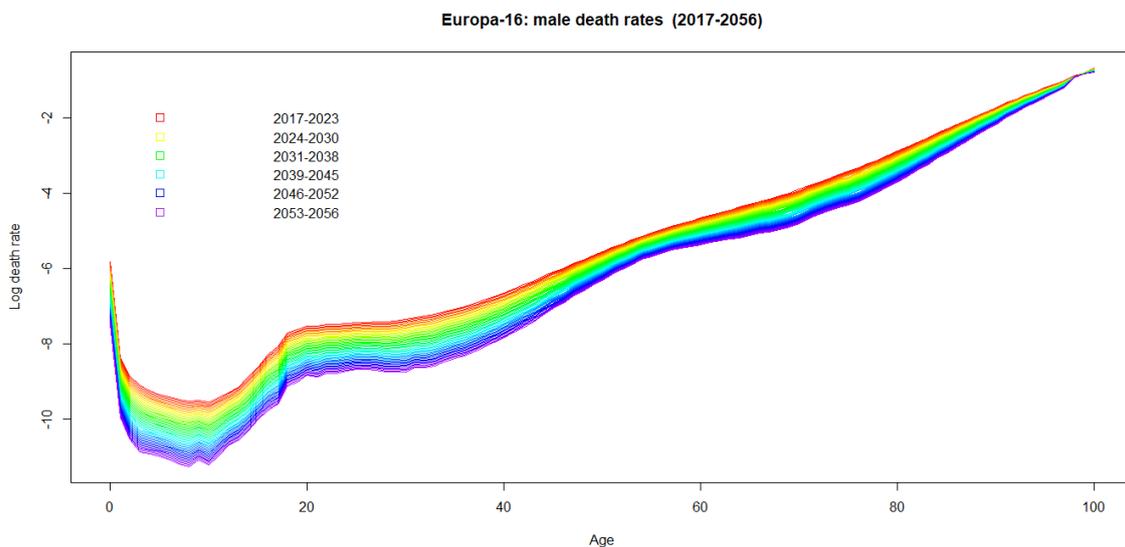
Figura 2.6. Parámetros estimados del modelo Lee-Carter para mujeres.

Fuente: Elaboración propia

Como se puede ver, la distribución de las funciones estimadas de  $a_x$  y  $k_t$  tienen correlación inversa. Si recordamos,  $a_x$  representaba el patrón que iba a presentar el tanto central de mortalidad para cada edad, mientras que  $k_t$  representaba la tendencia temporal de variación que iba a tener este tanto, estando calculadas ambas funciones en base a logaritmos. El hecho, por tanto, de que la pendiente para ambos parámetros sea inversa quiere decir que el tanto central de mortalidad aumenta con la edad y disminuye con el paso de los años.

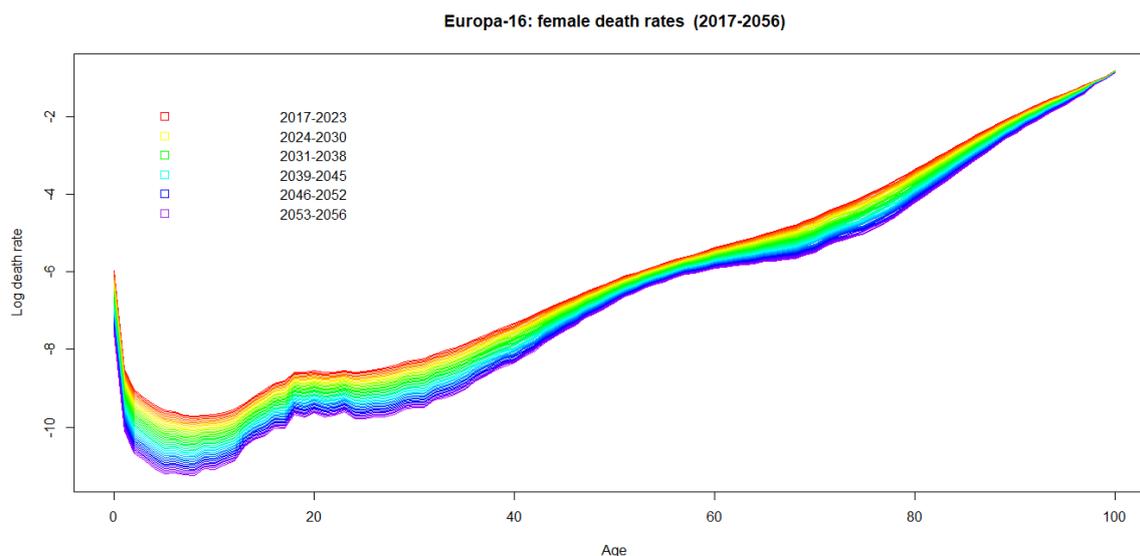
Si pasamos ahora a analizar el comportamiento de  $b_x^1$ , representativo de las desviaciones del cambio de mortalidad para cada edad, presenta grandes discrepancias en los primeros veinte años de edad entre hombres y mujeres, siendo este el período con más irregularidades para ambos modelos. Una vez producida ya la caída progresiva de la volatilidad hasta los sesenta años, aproximadamente, torna la tendencia y comienza a crecer de nuevo para ambos sexos hasta los 80 años, donde vuelve a ser decreciente.

Ahora pues, basándonos en el modelo Lee-Carter visto, se pueden realizar ya las proyecciones de la mortalidad y la correspondiente esperanza de vida, estando un paso más cerca de conocer los factores de mejora. De esta forma, se presenta a continuación los gráficos tanto para hombres como para mujeres de las tasas de mortalidad estimadas para el período 2017-2056.



**Figura 2.7.** Tasa de mortalidad paneuropea proyectada para hombres para el período 2017-2056.

*Fuente: Elaboración propia*



**Figura 2.8.** Tasa de mortalidad paneuropea proyectada para mujeres para el período 2017-2056.

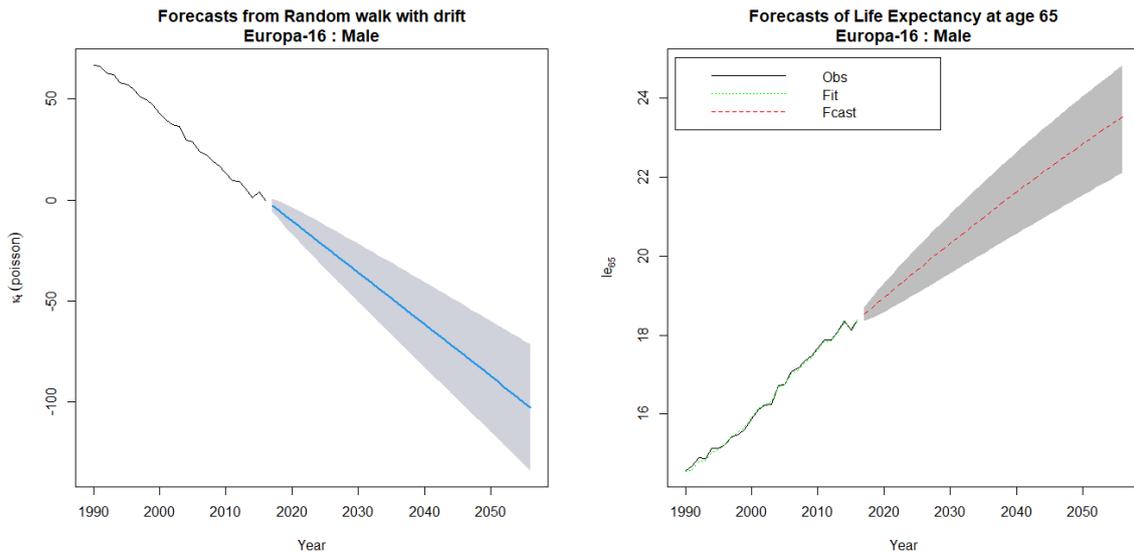
*Fuente: Elaboración propia*

No entraremos demasiado al detalle de análisis de estos gráficos ya que se ha comentado, en anteriores apartados, análisis parecidos. Bien cabe mencionar el hecho de que tanto para la tasa de mortalidad proyectada en hombres como en mujeres mejora significativamente con el paso de los años.

Destacable también es el hecho de cómo se van aplanando los efectos de la mortalidad entre los jóvenes europeos varones de entre 20 y 30 años de edad, no siendo tan expresiva la caída que presenta la tasa de mortalidad en este tramo.

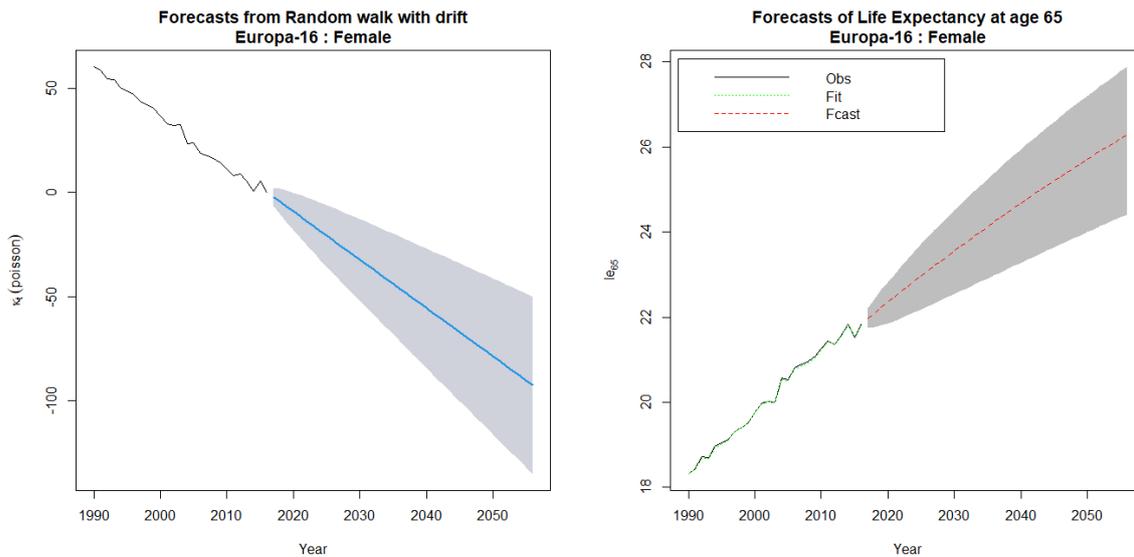
Todo ello lleva a la idea de una convergencia o aproximación de la tasa de mortalidad en hombres respecto a la de mujeres, haciéndose, en resumen, cada vez más parecidas. Algo evidente dado el momento socio-económico que se vive en el día a día, donde hombres y mujeres llevan parecidos niveles de vida y por tanto estarán expuestos a los mismos riesgos.

Explicada la nueva tendencia, podemos decir que será ya con estos datos con los que se calculará la probabilidad de fallecimiento de acuerdo a la fórmula 1.4. A partir de la obtención de la  $q_x$  para cada edad  $x$  en cada año  $t$ , será con lo que obtengamos los diferentes factores de mejora. Aunque, previo a comentar esto, analizaremos, rápidamente los resultados proyectados de las variables kappa,  $k_t$ , y la esperanza de vida.



**Figura 2.9.** Variable  $k_t$  y esperanza de vida en hombres para el periodo 2017-2056.

*Fuente: Elaboración propia*



**Figura 2.10.** Variable  $k_t$  y esperanza de vida en mujeres para el periodo 2017-2056.

*Fuente: Elaboración propia*

Como comentábamos al inicio de este apartado, las proyecciones de la esperanza de vida se harían sobre la edad de 65 años. Esta edad, es una edad clave para las diferentes entidades que comercialicen no sólo nuestro producto paneuropeo, sino cualquier producto de vida que implique una prestación de tipo vitalicio. A partir de esta fecha, la entidad tendrá que ir haciendo frente a una serie de pagos periódicos hasta el fallecimiento del ahorrador, por lo que el conocer las tendencias futuras en la estimación de vida

restante a partir de la jubilación se cree de gran interés, ya que cuanto más viva una persona, mayores serán las cuantías que tendrá que desembolsar la empresa promotora o distribuidora.

En líneas generales, al ser un periodo bastante amplio de estudio de las proyecciones (cuarenta años), tanto la variable kappa como la esperanza de vida a la edad de 65 años mejoran significativamente con el paso de los años. En el caso de los hombres, la mejora en la esperanza de vida es muy superior a la de las mujeres. Se estima, de acuerdo a los resultados mostrados, que, para el año 2050, en el caso de los hombres haya aumentado en torno a unos seis años la esperanza respecto al actual dato de 2016 (78,6 años). Asimismo, para el caso de las mujeres, la esperanza de vida no aumentará tanto como la del sexo contrario, pero también crecerá en aproximadamente cuatro años el dato ofrecido en 2016 (84 años).

Recuperamos, por tanto, la idea de que la longevidad y mortalidad en los hombres está convergiendo a la de las mujeres. Aunque el proceso sea lento, se está llevando de una manera progresiva y, si no se dieran riesgos catastróficos o epidemiológicos que afectaran a un sexo más que a otro, en años posteriores al último estudiado (2056) se encontraría ese momento en el que podríamos obtener, prácticamente, la uniformidad en los datos observados de la mortalidad paneuropea. En relación a esto, reiterar la interesante idea que ya se ha comentado en alguna ocasión de estudiar los efectos de la crisis sanitaria ocasionada por el coronavirus, repercutiendo directamente a la esperanza de vida futura, disminuyéndola.

Dicho esto, retomamos el cálculo de los factores de mejora tanto históricos como con datos proyectados para comentar los resultados ofrecidos por estos. En primer lugar, destacar a grandes rasgos que los factores de mejora calculados a partir de datos históricos condicionarán en mayor medida a la mejora de la mortalidad futura, haciendo esto que un mayor porcentaje de individuos llegue con vida a edades más avanzadas.

No obstante, en términos absolutos las discrepancias entre ambas variables no son significativas, pero en la práctica aseguradora y, a la hora de tener la entidad que estimar las prestaciones con una u otra probabilidad de fallecimiento, sí que repercutirá el hecho de saber que la población va a vivir más o no, ya que, los desembolsos que tenga que hacer a la cartera de ahorradores, afectará directamente al capital de solvencia que la empresa deba de mantener para hacer frente a sus compromisos de pago.

En un pequeño estudio de las diferencias entre los distintos factores de mejora se presenta, en valor absoluto, una discrepancia máxima entre los factores para cada edad de 0,01551 para hombres, estando la horquilla de valores de las diferencias entre este y el mínimo valor encontrado:  $2,32e-04$ . Para el caso de las mujeres, la horquilla de valores sería más amplia que la de hombres, ya que la máxima diferencia encontrada, también en valor absoluto, presentaría el valor de 0,02011 y el mínimo un valor de  $2,35e-07$ .

Visto esto, solo quedaría utilizar los distintos factores de mejora para el cálculo de la probabilidad de fallecimiento conforme al PERM (fórmula 3.1), la cual nos permitiría obtener las diferentes variables necesarias para el cálculo del plan de pensiones. Además, con los dos escenarios de los factores de mejora, tanto con datos históricos, como con datos proyectados, podremos, en el siguiente punto, ver en la práctica la verdadera influencia de estos según se utilicen unos u otros, repercutiendo así más o no en la solvencia de la entidad.

El porqué de realizar este estudio con estos escenarios viene de la diversa literatura que podemos encontrar acerca de cómo mejorar el cálculo de los factores de mejora para que o ahorradores o entidades se vean en mayor o menor medida perjudicadas. Es por ello por lo que se ha creído de interés su estudio que saldrá con la aplicación práctica que se va a presentar.

#### **5.4 APLICACIÓN PRÁCTICA**

Ya que conocemos la complejidad que esconden detrás los nuevos planes de pensiones paneuropeos, vamos a desenmascararlos estableciendo múltiples escenarios de ahorradores en PEPP, con diferentes sexos y edades entre ellos y cantidades a aportar durante su etapa activa, pero también con muchas características relativas a inversión que van a compartir todos los individuos del estudio.

Antes de presentar los primeros resultados, la normativa, en el Reglamento Delegado (UE) 2021/473 de la Comisión de 18 de diciembre de 2020, establece en su Anexo I el formato que deberá de tener el modelo del Documento de Datos Fundamentales que va a recibir el futuro ahorrador. Es por ello que, en primer lugar, contestaremos a aquellas preguntas que se han considerado convenientes el responder. Así pues, se recomienda leer expresamente el Reglamento anteriormente mencionado

para una visión más amplia de la forma en la que se tienen que responder cada una de las preguntas desde el punto de vista del promotor o distribuidor del PEPP.

Empezaríamos diciendo que, este PEPP del que vamos a presentar diferentes escenarios, está clasificado en la categoría 1 de riesgo de las cuatro existentes, por lo que sería la opción más estable o de menor riesgo. Ello se debe a la gran inversión en renta fija que se ha hecho, además de comprender también la evolución del precio de un swaption en el que se ha invertido a partir de los datos existentes en las bases proporcionadas por la herramienta de estudio.

Seguidamente, se respondería con la opción de renta vitalicia la pregunta sobre las diferentes modalidades de ingresos en la jubilación. Otras opciones que podemos encontrar es la de cantidad fija única, retirada de fondos periódica o una combinación de todas las anteriores. En este trabajo se ha optado por la opción de pago mediante rentas vitalicias.

Y ya, antes de dar paso a los resultados de los diferentes escenarios, el Documento de Datos Fundamentales debería de responder a diferentes temas de base más legal como el qué ocurriría si fallece, rescata o se muda de país, a los que debería de responder el promotor del PEPP pero que, en este trabajo, por no tener un objetivo plenamente jurídico, no se han respondido.

Con esto completo, tan sólo quedaría presentar en este documento lo concerniente a una base de carácter más numérica y de cálculos actuariales, como es el presentar al ahorrador en PEPP las cantidades que percibirá en la jubilación según el tipo de escenario que sigan las inversiones. En este caso, los tipos de intereses calculados mediante la metodología G2++ o Hull-White de 2 factores que dispone la norma para su estimación.

Bajo este supuesto encontraríamos tres escenarios:

1. Qué puede esperar el ahorrador en el momento de la jubilación si la rentabilidad de sus inversiones es mala, donde dentro de los  $n$  escenarios creados para los tipos de intereses se extrae el de menor rendimiento.
2. Qué puede esperar el ahorrador en el momento de la jubilación si la rentabilidad de sus inversiones es medianamente satisfactoria, siendo el escenario de tipos de intereses elegido la mediana de los  $n$  escenarios totales realizados.

3. Qué puede esperar el ahorrador en el momento de la jubilación si la rentabilidad de sus inversiones es muy buena, donde dentro de los  $n$  escenarios creados para los tipos de intereses se escogería el de mayor rendimiento.

A partir de ahora, se procederá mediante el cálculo a dar respuesta a estos tres escenarios que nos exige el Documento de Datos Fundamentales para cada uno de nuestros individuos partícipes en el plan. Por ello, se pasa a resumir en el cuadro que se presenta a continuación los cuatro casos que vamos a analizar.

**Tabla 3.**

*Datos de los partícipes.*

<b>Edad</b>	<b>Aportación mensual</b>	<b>Sexo</b>
45	100,00 €	Mujer
38	80,00 €	Hombre
42	200,00 €	Mujer
50	120,00 €	Mujer

Añadir a esta información, que se incluyen como características comunes para todos los partícipes, la edad de jubilación o de rescate del plan de pensiones, establecido en los 65 años edad y la edad de valoración inicial del plan, datada en la fecha del 31 de enero de 2017. Dicho esto, a partir de ahora, se valorará de manera más detenida el primero de los individuos planteados, para, después, de forma más resumida, realizar las oportunas valoraciones y comparaciones entre los diferentes casos.

**Tabla 4.**

*Resultados del primer partícipe planteado.*

<b>Escenario favorable</b>	<b>Escenario mediana</b>	<b>Escenario desfavorable</b>
<i>Montante acumulado</i>	<i>Montante acumulado</i>	<i>Montante acumulado</i>
25.124,47 €	25.075,26 €	24.889,82 €
<b>Factor de mejora utilizado: Histórico</b>		
<i>Renta percibida</i>	<i>Renta percibida</i>	<i>Renta percibida</i>
101,15 €	100,95 €	100,20 €
<b>Factor de mejora utilizado: Proyectoado</b>		
<i>Renta percibida</i>	<i>Renta percibida</i>	<i>Renta percibida</i>
101,75 €	101,55 €	100,80 €

De acuerdo al primer individuo de edad 45 años, mujer y cuya aportación mensual al plan es de 100 euros, es obtenido un montante total al final de su etapa activa valorado inicialmente en 25.075,26 €, pudiendo estar entre una horquilla de valores que va desde 24.889,82 € a 25.124,47 €, dependiendo del escenario más o menos favorable que proceda en su caso.

El primer análisis que se observa es que, a pesar de haber capitalizado 24.000 euros ( $100 \text{ €} \cdot 240 \text{ meses}$  hasta la prestación), el montante resultante no es del todo atractivo. Ello se debe al tipo de inversión que se ha realizado, haciendo que en el caso de optar por mayor riesgo se puedan ver mejores resultados, aunque también contaríamos con un escenario más desfavorable que el visto en este caso. Por ello, el optar por un PEPP con tipo de riesgo 1, asegura en cierto modo el ahorro, aunque las ganancias no sean las más altas.

En relación al estudio de los resultados de las diferentes opciones de renta vitalicia de las que puede disponer el ahorrador, se perciben remuneraciones más atractivas, desde el punto de vista del cliente, con el cálculo de las probabilidades de fallecimiento a partir de datos proyectados, siendo incluso mejor la remuneración dada por la mediana en las proyectadas que la planteada como el mejor escenario utilizando los factores de mejora históricos.

El hecho de tener que utilizar un factor de mejora a partir de datos proyectados implicaría en la entidad gestora del PEPP un mayor aumento en la cuantía del SCR, ya que el ahorrador percibiría un mayor capital, algo que no interesaría a la solvencia empresarial.

Veamos ahora el estudio planteado para el resto de individuos. Con él podremos comparar qué perfiles, por ejemplo, de edad, son más interesantes para incurrir en un plan con estas características, así como establecer comparaciones de cualquier otra índole.

**Tabla 5.***Resultados del segundo partícipe planteado.*

<b>Escenario favorable</b>	<b>Escenario mediana</b>	<b>Escenario desfavorable</b>
<i>Montante acumulado</i>	<i>Montante acumulado</i>	<i>Montante acumulado</i>
27.325,17 €	27.171,94 €	26.753,79 €
<b>Factor de mejora utilizado: Histórico</b>		
<i>Renta percibida</i>	<i>Renta percibida</i>	<i>Renta percibida</i>
119,31 €	118,64 €	116,81 €
<b>Factor de mejora utilizado: Proyectoado</b>		
<i>Renta percibida</i>	<i>Renta percibida</i>	<i>Renta percibida</i>
120,23 €	119,55 €	117,71 €

**Tabla 6.***Resultados del tercer partícipe planteado.*

<b>Escenario favorable</b>	<b>Escenario mediana</b>	<b>Escenario desfavorable</b>
<i>Montante acumulado</i>	<i>Montante acumulado</i>	<i>Montante acumulado</i>
57.974,70 €	57.805,85 €	57.107,16 €
<b>Factor de mejora utilizado: Histórico</b>		
<i>Renta percibida</i>	<i>Renta percibida</i>	<i>Renta percibida</i>
230,51 €	229,84 €	227,06 €
<b>Factor de mejora utilizado: Proyectoado</b>		
<i>Renta percibida</i>	<i>Renta percibida</i>	<i>Renta percibida</i>
232,09 €	231,42 €	228,62 €

**Tabla 7.***Resultados del cuarto partícipe planteado.*

<b>Escenario favorable</b>	<b>Escenario mediana</b>	<b>Escenario desfavorable</b>
<i>Montante acumulado</i>	<i>Montante acumulado</i>	<i>Montante acumulado</i>
22.605,92 €	22.544,07 €	22.396,55 €
<b>Factor de mejora utilizado: Histórico</b>		
<i>Renta percibida</i>	<i>Renta percibida</i>	<i>Renta percibida</i>
93,02 €	92,77 €	92,16 €
<b>Factor de mejora utilizado: Proyectoado</b>		
<i>Renta percibida</i>	<i>Renta percibida</i>	<i>Renta percibida</i>
93,44 €	93,19 €	92,58 €

Aparte de las características anteriormente comentadas para el partícipe uno, comunes al resto de individuos planteados, lo que se pretende ahora es realizar una comparación, a grandes rasgos, entre los distintos perfiles que tenemos, para determinar algunas conclusiones sobre los planes de pensiones paneuropeos.

Un hecho relevante, pues, es la influencia de la edad del partícipe en estos planes. Cuando la Unión Europea decía que los principales clientes objetivo a los que irían enfocados estos planes eran los jóvenes, no era de extrañar. Aquí, en esta selección de cuatro individuos, es evidente la correlación positiva entre una edad más joven de inicio y mayores montantes obtenidos al final de la etapa activa. Hecho ocurrido gracias a la capitalización de un mayor número de cuotas.

Si de verdad se concienciara entre la población joven el hecho de que realizando pequeñas aportaciones a planes de pensiones privados se canalizaría de un mejor modo el ahorro de cara a la jubilación, se podría reducir el gasto presupuestado que en países como España se está destinando para poder solventar las pensiones públicas, cuando estas debían de regirse por un sistema contributivo, sin financiación externa recibida directamente de los Presupuestos Generales.

Así pues, es interesante acabar el punto mencionando que esta misma práctica que se ha hecho para estos individuos se puede realizar modificando varias hipótesis que, para estos casos, se han tenido en cuenta. Por ejemplo, un nuevo modelo de PEPP se generaría modificando tan sólo el tipo de riesgo que estaría dispuesto a asumir el ahorrador en PEPP, conllevando una nueva reestructuración de las inversiones.

Para cerrar este punto, una cosa sí que debe de quedar clara y es que, a pesar de no estar completamente consolidada la normativa que regula estos planes y a falta de diferentes resoluciones que ayuden a gestionar de una manera eficiente distintos aspectos de estos productos, estos planes han venido con un objetivo ambicioso y es el solucionar la problemática europea convenciendo a la población con una propuesta que traspasa las barreras nacionales.

## CONCLUSIONES

La situación de inestabilidad en los sistemas públicos de pensiones que envuelve todo el territorio europeo, ha hecho que la Unión Europea comience a replantearse en los últimos años el hecho de incentivar la inversión y el ahorro privado entre su población. De esta manera, podrían poner el freno a posibles quiebras de lo que sería la Seguridad Social que poseería cada país miembro, evitando así futuros rescates o ayudas que no beneficiarían al buen mantenimiento económico de esta organización.

A objeto de solventar estos problemas, entre otros muchos, nacen los planes de pensiones individuales paneuropeos o PEPP por sus siglas en inglés. Estos planes, nunca vistos, son de obligada comercialización a partir de junio de 2022 por las distintas entidades que pueden introducirlos entre su cartera de productos. El hecho de presentar unas características muy novedosas frente al resto de planes que encontramos hoy día en el mercado y el contar todavía con muchos cabos sueltos en cuanto a su tratamiento, ha hecho que sea la inquietud que ha determinado la realización de este trabajo, pudiendo así haber ampliado los conocimientos acerca de estos nuevos productos.

De esta manera, este trabajo ha tenido un carácter muy informativo, presentando los antecedentes que han dado pie a la creación del PEPP, la explicación de las diferentes características con las que cuentan y la exposición de la metodología para su cálculo, así como una aplicación práctica de los mismos, con una visión mucho más técnica que los anteriores capítulos.

Un ejercicio que no se ha realizado hasta el momento en el campo actuarial y del cual se hace eco en este trabajo es el interés por la creación de unas tablas de mortalidad paneuropeas. Ya que la norma pretende unificar las características que presentarán estos planes para los diferentes Estados miembros de la Unión, nos alineamos a este objetivo y al también perseguido reto de la Unión por conseguir un mercado único de capitales, para la realización de diferentes cálculos que nos han permitido determinar la tabla de mortalidad con base 2016, en base a los principios de solidaridad y distribución de los riesgos.

A partir de esta tabla, se han proyectado las diferentes probabilidades de fallecimiento que utilizaremos para la construcción de los planes. Estas, por seguir la metodología que se aplica en la práctica aseguradora, cuentan con unos factores de mejora

que, en este trabajo, se han calculado tanto con datos históricos, como con datos de la mortalidad proyectados a partir del modelo de Lee-Carter.

Con todo ello, los resultados, *grosso modo*, que se han obtenido, han sido, en primer lugar, el encontrar que, entre la selección de países que se han tenido en cuenta para los diferentes cálculos, los países pertenecientes al Este europeo han condicionado de manera significativa el estudio de la mortalidad paneuropea para edades prematuras, al poseer estos países unas elevadas defunciones entre los recién nacidos. A pesar de ello, la esperanza de vida paneuropea obtenida a partir de la probabilidad de fallecimiento para el año 2016 (año base de la tabla paneuropea calculada) se encuentra en consonancia con los datos ofrecidos por el Instituto de Estadística de Cataluña para la esperanza de vida al nacer de una persona miembro de la UE-27 en 2016. Las discrepancias entre los resultados que aquí se muestran y los presentados en nuestro estudio se deben a la muestra de países que este trabajo ha tenido, inferior a la del Idescat, y a las distintas hipótesis utilizadas para el cálculo de la mortalidad.

Seguidamente, al calcular la proyección de la mortalidad, se ha observado que la tasa de mortalidad en los hombres está convergiendo hacia los datos que presentan para dicha tasa las mujeres, manifestando características muy similares en la tendencia a futuro de ambas. Viniendo a decir esto que, cada vez más, se está más cerca de la idea en la que los hombres y mujeres tengan la misma esperanza de vida al nacer.

Como cierre a los resultados, se hará mención de algunos hechos relevantes encontrados al analizar los resultados de los planes de pensiones. Pues bien, de cara al cálculo de las prestaciones que obtendría el ahorrador del PEPP, presentan unos resultados más favorecedores para este y, por consiguiente, peores para la entidad, los cálculos realizados con los factores de mejora pertenecientes a datos proyectados. Así pues, es comprensible que en la mayoría de la literatura e incluso en la mayoría de la normativa a aplicar se calculen con los relativos a datos históricos, favoreciendo así la solvencia de la empresa. Por otro lado, destacar que la variable edad condiciona en gran medida la renta a percibir como prestación. Es por ello que estos planes tienen un gran atractivo entre la población joven, que podrá canalizar sus ahorros y obtener buenos rendimientos con aportaciones no muy elevadas durante la etapa activa.

Estos resultados podrían haber presentado datos más enriquecedores y más exhaustivos de no haber sido por las limitaciones encontradas a la hora de realizar este

trabajo. Primeramente, al ser un producto tan novedoso no se encuentra ningún tipo de líneas de investigación más allá de textos periodísticos y columnas de opinión que hablan sobre esta solución ofrecida por la Unión al problema de las pensiones. Ello ha imposibilitado el conseguir una bibliografía más extensa que pudiera contrastar diferentes puntos de vista o la comparativa de resultados con los cálculos aquí presentados.

Del mismo modo, la no disponibilidad de la base de datos perteneciente a Irlanda, ha hecho que no se pueda tener en cuenta en este estudio un país que cumplía con numerosas características para ser idóneo de inclusión en el análisis. Un problema también relacionado con las bases de datos es que, al poseer un gran número de valores, las herramientas utilizadas para su análisis y, dentro de estas, diferentes funciones para el desarrollo de la metodología, no soportaban la cantidad de peso incluida, por lo que se ha tenido que limitar la muestra en algunas partes del estudio, las cuales han sido comentadas en el capítulo de Datos, Hipótesis y Software y, también, en el de Resultados.

Para finalizar, la línea investigadora que se puede abrir a partir de este trabajo es enormemente amplia. Así pues, como posibles líneas de investigación se podría considerar, cuando hubiese datos disponibles, los efectos de la crisis sanitaria ocasionada por el coronavirus en las tablas de mortalidad paneuropeas realizadas, añadido a esto, el ver cómo la esperanza de vida de la población europea se va a ver retraída y condicionada por este importante fenómeno.

Asimismo, otra línea interesante, que se podría utilizar para complementar las tablas de mortalidad paneuropeas, es la información presentada en la Circular 1/2021, de 17 de junio, la última emitida hasta la fecha por la DGSFP, donde se habla sobre la necesidad de inclusión de aspectos cualitativos, aparte de cuantitativos, que garanticen la adecuación de las hipótesis biométricas aplicadas al cálculo.



## Bibliografía

- ❖ BBVA. (2020, 2 septiembre). *Los Planes de Pensiones Paneuropeos (PEPP).* BBVA Mi jubilación. <https://www.jubilaciondefuturo.es/es/blog/los-planes-de-pensiones-paneuropeos-pepp.html>
- ❖ Benito, F. (2020). DOCUMENTOS DE INFORMACIÓN EN PRODUCTOS PANEUROPEOS DE PENSIONES. Propuesta de PEPP KID /PEPP BENEFIT STATEMENT (EIOPA) y RD 738/2020, de 4 de agosto. Derecho de Seguros y Pensiones/Insurance and Pension Law. <https://fbenitosma.blogspot.com/>
- ❖ Bermell, C. (2019, 5 abril). La Eurocámara aprueba el producto paneuropeo de pensiones. Economía3. <https://economia3.com/2019/04/05/189414-la-eurocamara-aprueba-la-normativa-del-producto-paneuropeo-de-pensiones/>
- ❖ Blanchard, A. (2014). The two-factor Hull-White model: pricing and calibration of interest rates derivatives. KTH Royal Institute of Technology.
- ❖ Brigo, D., & Mercurio, F. (2007). *Interest rate models-theory and practice: with smile, inflation and credit*. Springer Science & Business Media.
- ❖ Carter, L. R. y R.D. Lee (1992). Modeling and forecasting U.S. mortality. *Journal of the American Statistical Association* 87(419), 659-671.
- ❖ Colaboradores de Wikipedia. (2021, 20 marzo). Movimiento browniano geométrico. Wikipedia, la enciclopedia libre. [https://es.wikipedia.org/wiki/Movimiento\\_browniano\\_geom%C3%A9trico](https://es.wikipedia.org/wiki/Movimiento_browniano_geom%C3%A9trico)
- ❖ Colaboradores de Wikipedia. (2021a). Índice de desarrollo humano. Wikipedia, la enciclopedia libre. [https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%8Dndice\\_de\\_desarrollo\\_humano](https://es.wikipedia.org/wiki/%C3%8Dndice_de_desarrollo_humano)
- ❖ Comisión Europea (2020). REGLAMENTO DELEGADO (UE) 2021/473 DE LA COMISIÓN de 18 de diciembre de 2020.
- ❖ Comisión Europea (2021). REGLAMENTO DELEGADO (UE) 2021/895 DE LA COMISIÓN de 24 de febrero de 2021 por el que se completa el Reglamento (UE) 2019/1238 del Parlamento Europeo y del Consejo en lo que atañe a la intervención de productos.

- ❖ Comisión Europea (2021). REGLAMENTO DELEGADO (UE) 2021/896 DE LA COMISIÓN de 24 de febrero de 2021 por el que se completa el Reglamento (UE) 2019/1238 del Parlamento Europeo y del Consejo en lo que concierne a la información adicional a los efectos de la convergencia de la información presentada a efectos de supervisión.
- ❖ EIOPA-21/260. (2021, marzo). DIRECTRICES SOBRE LA PRESENTACION DE INFORMACION A EFECTOS DE SUPERVISION DEL PEPP.  
[https://www.eiopa.europa.eu/content/eiopa-issues-guidelines-supervisory-reporting-pan-european-personal-pension-product\\_en](https://www.eiopa.europa.eu/content/eiopa-issues-guidelines-supervisory-reporting-pan-european-personal-pension-product_en)
- ❖ Estadísticas de 2019 sobre seguridad vial: ¿qué esconden las cifras? (2020, 11 junio). European Commission.  
[https://ec.europa.eu/commission/presscorner/detail/es/qanda\\_20\\_1004](https://ec.europa.eu/commission/presscorner/detail/es/qanda_20_1004)
- ❖ Expansión (2021). UE - Unión Europea 2021. datosmacro.com.  
<https://datosmacro.expansion.com/paises/grupos/union-europea>
- ❖ EY. (2017, junio). Study on the feasibility of a European Personal Pension Framework (FISMA/2015/146(02)/D). European Union.  
<https://doi.org/10.2874/626891>
- ❖ Fermoso, F. J. P., & González, A. G. (2003). Valoración actuarial de un plan de pensiones según los métodos individual y agregado de la edad normal de entrada. Cuadernos del CIMBAGE, (6), 45-74.
- ❖ Gil, A. (2019, 13 febrero). *La Unión Europea impulsa los planes de pensiones privados con un nuevo «producto paneuropeo»*. ElDiario.es.  
[https://www.eldiario.es/economia/union-europea-pensiones-privados-paneuropeo\\_1\\_1704543.html](https://www.eldiario.es/economia/union-europea-pensiones-privados-paneuropeo_1_1704543.html)
- ❖ Gil, F. R. (2001). Los métodos actuariales en la instrumentación de compromisos de pensiones a través de planes de pensiones. Cuadernos de Estudios Empresariales, (11), 231.
- ❖ Idescat. (2020, 23 septiembre). *Indicadores de la Unión Europea. Esperanza de vida al nacer. Por sexo. 2016*.  
<https://www.idescat.cat/indicadors/?id=ue&n=10106&lang=es&t=201600>
- ❖ INE - Instituto Nacional de Estadística. (s. f.). Flujo de emigración con destino al extranjero por año, país de destino y nacionalidad (española/extranjera)(24303).

- INE. Recuperado 6 de marzo de 2021, de <https://www.ine.es/jaxiT3/Tabla.htm?t=24303&L=0>
- ❖ INE. (2016, mayo). *Tablas de Mortalidad. Metodología*. <https://www.ine.es/metodologia/t20/t2020319a.pdf>
  - ❖ Jiménez, A. (2020, 3 octubre). *Planes de Pensiones Paneuropeos: ¿Qué son? Hola inversión: Invierte tu dinero de forma inteligente*. <https://holainversion.com/planes-pensiones-paneuropeos/>
  - ❖ *La jubilación y el ahorro en la UE: Suecia, el mejor; España en las últimas posiciones*. (2016, 28 julio). Instituto Santalucía. <https://institutosantalucia.es/la-jubilacion-y-el-ahorro-en-la-ue/>
  - ❖ *La UE da luz verde a crear planes de pensiones paneuropeos*. (2019, 13 febrero). La Vanguardia. <https://www.lavanguardia.com/politica/20190213/46439320101/la-ue-da-luz-verde-a-crear-planes-de-pensiones-paneuropeos.html>
  - ❖ Lee, R. (2000). The Lee-Carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications. *North American actuarial journal*, 4(1), 80-91.
  - ❖ Lledó Benito, J. (2017). Análisis y evaluación de hipótesis implícitas en la construcción de tablas de mortalidad.
  - ❖ Macias, Y., & Santolino, M. (2018). Aplicación de los modelos Lee-Carter y Renshaw-Haberman en los seguros de vida y mixtos. *Anales del Instituto de Actuarios Españoles*, 2018, vol. 4, num. 24, p. 53-78.
  - ❖ Mateos-Aparicio, G., Vicente, A., Hernández, J., Caballero, A., & Moreno, J. (2015). *ELEMENTOS DE MATEMÁTICA ACTUARIAL SOBRE PREVISIÓN SOCIAL Y SEGUROS DE VIDA*. Elementos de Matemática Actuarial. [https://webs.ucm.es/info/sevipres/P1/03/1\\_3\\_1.php](https://webs.ucm.es/info/sevipres/P1/03/1_3_1.php)
  - ❖ Miguel, B. (2017, 29 junio). *Llegan los primeros planes de pensiones paneuropeos ¿En qué consisten?* Cinco Días. [https://cincodias.elpais.com/cincodias/2017/06/28/midinero/1498669796\\_031996.html](https://cincodias.elpais.com/cincodias/2017/06/28/midinero/1498669796_031996.html)
  - ❖ Montero, P. (2019, 20 abril). *Planes de pensiones paneuropeos: ventajas sobre el papel, pero llenos de interrogantes*. 65 y más - El diario de las personas mayores. [https://www.65ymas.com/economia/pensiones/planespensiones-paneuropeos-estanolenos-de-interrogantes\\_2414\\_102.html](https://www.65ymas.com/economia/pensiones/planespensiones-paneuropeos-estanolenos-de-interrogantes_2414_102.html)

- ❖ Montero, P. (2020, 20 agosto). *¿Qué será de los planes de pensiones paneuropeos? 65 y más* - El diario de las personas mayores.  
[https://www.65ymas.com/economia/planes-de-pensiones/pensiones-que-sera-de-los-planes-paneuropeos\\_18417\\_102.html](https://www.65ymas.com/economia/planes-de-pensiones/pensiones-que-sera-de-los-planes-paneuropeos_18417_102.html)
- ❖ Montero, P. (2020b, agosto 20). *¿Qué será de los planes de pensiones paneuropeos? 65 y más* - El diario de las personas mayores.  
[https://www.65ymas.com/economia/planes-de-pensiones/pensiones-que-sera-de-los-planes-paneuropeos\\_18417\\_102.html](https://www.65ymas.com/economia/planes-de-pensiones/pensiones-que-sera-de-los-planes-paneuropeos_18417_102.html)
- ❖ Moudiki, T. (2014, 11 octubre). Monte Carlo simulation of a 2-factor interest rates model with ESGtoolkit. Rstudio-pubs-static. [https://rstudio-pubs-static.s3.amazonaws.com/33287\\_ba96bd64723343ffbe603619a6f02b78.html](https://rstudio-pubs-static.s3.amazonaws.com/33287_ba96bd64723343ffbe603619a6f02b78.html)
- ❖ Mytsan, O. (2017, 4 enero). Resoluciones de la DGSFP: tipos de interés máximos para seguros de vida y planes de pensiones en 2017 –. Instituto de Actuarios Españoles. <https://www.actuarios.org/resoluciones-de-la-dgsfp-tipos-de-interes-maximos-para-seguros-de-vida-y-planes-de-pensiones-en-2017/>
- ❖ Nieto, D. I. L. (2018). El proceso estocástico de Feller y el modelo Cox-Ingersoll-Ross: modelación de tasas de interés y valoración de bonos. ODEON, (13), 31-44.
- ❖ Parlamento Europeo (2019). REGLAMENTO (UE) 2019/1238 DEL PARLAMENTO EUROPEO Y DEL CONSEJO de 20 de junio de 2019 relativo a un producto paneuropeo de pensiones individuales (PEPP).
- ❖ Pérez, J. (2020, 16 julio). *Creación de una tabla de mortalidad*. Apuntes de demografía. <https://apuntesdedemografia.com/curso-de-demografia/temario/tema-4-analisis-de-la-mortalidad/creacion-de-una-tabla-de-mortalidad/>
- ❖ Renshaw, A. E., & Haberman, S. (2006). A cohort-based extension to the Lee–Carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and economics*, 38(3), 556-570.
- ❖ Tamarit Ramos, S. (2013). El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés. Aplicación al tipo de interés interbancario EONIA.
- ❖ UNIVESITAT DE VALENCIA. (2011). TEMA 2: La Tabla de Mortalidad: La mortalidad como fenómeno discreto [Libro electrónico] (pp. 1–5).  
<https://www.uv.es/mlejarza/actuariales/EAA/EAA2.pdf>

- ❖ Wang, H., Abajobir, A. A., Abate, K. H., Abbafati, C., Abbas, K. M., Abd-Allah, F., ... & Choi, J. Y. J. (2017). Global, regional, and national under-5 mortality, adult mortality, age-specific mortality, and life expectancy, 1970–2016: a systematic analysis for the Global Burden of Disease Study 2016. *The Lancet*, 390(10100), 1084-1150.
- ❖ Wizani, N. (2019, 9 enero). *Proyecciones de mortalidad utilizando el modelo Lee-Carter*. RPubS. <https://rpubs.com/naderwizani/leecarter>



## Anexo I – Código R

### Código R - Trabajo Fin de Máster

```
#####
##### DATOS NECESARIOS #####
#####

setwd("C:\\Users\\Usuario\\Desktop\\TFM\\LONGEVIDAD")

# 1) LIBRERÍAS NECESARIAS

library(reshape2)
library(rayshader)
library(ggplot2)
library(tidyverse)
library(datasets)
library(ggfortify)
library(changepoint)
library(forecast)
library(ilc)
library(StMoMo)
library(kableExtra)

# 2) BASES DE DATOS

# 2.1) Lectura de bases de datos necesarias

# Número de defunciones en los 16 países europeos estudiados:

deaths <- read.csv(file="deaths.csv", sep=";") #Datos por países
dx <- read.csv(file="dx.csv", sep=";") #Datos paneuropeos

# Número de expuestos en los 16 países europeos estudiados:

exposures <- read.csv(file="exposures.csv", sep=";") #Datos por países
Lx <- read.csv(file="Lx.csv", sep=";") #Datos paneuropeos

# 2.2) Ajuste de las bases de datos:

#Selección de los periodos de estudio coincidentes dentro de las bases
de datos

deaths_sel <- deaths[deaths[,1]>=1990 & deaths[,1]<=2016 & deaths[,2]>
=0 & deaths[,2]<=110,]
exposures_sel <- exposures[exposures[,1]>=1990 & exposures[,1]<=2016
& exposures[,2]>=0 & exposures[,2]<=110,]
dx_sel <- dx[dx[,1]<=2016,]
Lx_sel <- Lx[Lx[,1]<=2016,]
```

```

# Ajustamos datos y ordenamos por edad para graficar

dx_graf<- dx_sel %>% arrange(Age) #Para ordenar La edad y poder graficar
Lx_graf<-Lx_sel %>% arrange(Age)
dx_real<- dx %>% arrange(Age) #Para que incluya 2017 para La creación
de La mx
Lx_real<-Lx %>% arrange(Age)

#####
##### ESTUDIO PREVIO DE LA LONGEVIDAD CON DATOS HISTÓRICOS #####
#####

# 1) DISTRIBUCIÓN DE LAS MUERTES TOTALES POR PAÍSES DE 1990 A 2016

# 1.1) Mujeres

windows()
ggplot(deaths_sel, aes(x = Age, y = as.numeric(as.character(Female))))
+
  geom_bar(stat='identity') +
  facet_wrap(~Country,scales="free_y")+
  xlab("Edad")+
  ylab("Nº Total de defunciones en el período - Mujeres")

# 1.2) Hombres

windows()
ggplot(deaths_sel, aes(x = Age, y = as.numeric(as.character(Male)))) +
  geom_bar(stat='identity') +
  facet_wrap(~Country,scales="free_y")+
  xlab("Edad")+
  ylab("Nº Total de defunciones en el período - Hombres")

# 2) DISTRIBUCIÓN DE LAS MUERTES TOTALES A NIVEL PANEUROPEO DE 1990 A
2016

require(gridExtra)

# 2.1) Mujeres

plot1<-ggplot(dx_graf, aes(Age,Female), alpha = 0.5) +
  geom_line(aes(colour = as.factor(Year)))+
  ggtitle("Mortalidad paneuropea - Mujeres")+
  xlab("Edad")+ ylab("Nº Defunciones Mujeres")+theme(legend.position =
"right")+
  theme(legend.title=element_blank())

# 2.2.) Hombres

```

```

plot2<-ggplot(dx_graf, aes(Age, Male), alpha = 0.5) +
  geom_line(aes(colour = as.factor(Year)))+
  ggtitle("Mortalidad paneuropea - Hombres")+
  xlab("Edad")+ ylab("Nº Defunciones Hombres")+theme(legend.position =
"right")+
  theme(legend.title=element_blank())

windows()
grid.arrange(plot1, plot2, ncol=2)

#####
##### TABLA DE MORTALIDAD CON DATOS HISTÓRICOS #####
#####

# 1) mx: Tasa específica de mortalidad a La edad x

#Construimos cuatro vectores para ir completando con un bucle:

mx_M<-c(1:3108)
mx_H<-c(1:3108)
denominador_M<-c(1:3108)
denominador_H<-c(1:3108)

#Con el bucle haremos que cada valor cumpla las características que qu
eremos
#(Ajustadas a La normativa de creación de Las tablas propuesta)

filas<- as.numeric(count(Lx_real))
for (i in 1:filas){
  if(Lx_real[i,1]==2017){
    mx_M[i]<-100 #se coloca un número al azar en 2017 ya que se borrar
á
    mx_H[i]<-100
  } else{
    denominador_M[i]<-1/2*as.numeric(Lx_real[i,3])+1/2*as.numeric(Lx_r
eal[i+1,3])
    denominador_H[i]<-1/2*as.numeric(Lx_real[i,4])+1/2*as.numeric(Lx_r
eal[i+1,4])
    mx_M[i]<-as.numeric(dx_real[i,3])/denominador_M[i]
    mx_H[i]<-as.numeric(dx_real[i,4])/denominador_H[i] }
}

#Construimos un data.frame para poder representar gráficamente:

mx<-as.data.frame(cbind(dx_real[,1],dx_real[,2], mx_M, mx_H))
colnames(mx)<- c('Year', 'Age', 'Female', 'Male')
mx<-mx[mx$Year < 2017, ] #Eliminamos el año 2017
colnames(mx)<- c('Year', 'Age', 'Female', 'Male')

#Para La creación de La tabla de mortalidad escogeremos Los datos
#de 2016 por ser Los mas recientes:

mx2016<-subset(mx, mx[,1]==2016,drop = FALSE)

```

```

# 2) qx: Probabilidad o riesgo de muerte con edad cumplida x

#Para calcular la qx, planteremos la siguiente hipótesis

qx_M<-as.numeric(mx$Female)/(1+1/2*as.numeric(mx$Female))
qx_H<-as.numeric(mx$Male)/(1+1/2*as.numeric(mx$Male))

#Construimos un data.frame para poder representar gráficamente:

qx<-as.data.frame(cbind(mx[,1],mx[,2], qx_M, qx_H))
colnames(qx)<- c('Year', 'Age', 'Female', 'Male')

#Sustituimos el valor de q110 por 1, así como aquellos valores que sup
eren 1,
#Los limitamos a 1, ya que qx>1 es un error.

qx_real<-as.data.frame(cbind(mx[,1],mx[,2], replace(qx[,3],
                                                    qx[,2]==110|qx[,3]
>1,1), replace(qx[,4],qx[,2]==110|qx[,4]>1,1)))
colnames(qx_real)<- c('Year', 'Age', 'Female', 'Male')

#Para la creación de la tabla de mortalidad escogeremos los datos
#de 2016 por ser los más recientes:

qx2016<-subset(qx_real, qx_real[,1]==2016,drop = FALSE)

# 2.1.) Representación gráfica de la tasa de mortalidad

#Calculamos la mx logarítmica para estandarizar los datos:

mx_log<-as.data.frame(cbind(mx[,1],mx[,2], log(as.numeric(mx[,3])), lo
g(as.numeric(mx[,4]))))
colnames(mx_log)<- c('Year', 'Age', 'Female', 'Male')

#Representamos la mx en hombres:

require(gridExtra)
plotmx<-ggplot(mx_log, aes(x = Age, y = as.numeric(as.character(Male))
)) +
  geom_line(aes(colour = as.factor(Year)))+
  xlab("Edad")+
  ylab("Tasa de mortalidad Hombres")+theme(legend.position = "right")
+
  theme(legend.title=element_blank())

#Representamos la mx en mujeres:

plotmx_M<-ggplot(mx_log, aes(x = Age, y = as.numeric(as.character(Fema
le)))) +
  geom_line(aes(colour = as.factor(Year)))+
  xlab("Edad")+
  ylab("Tasa de mortalidad Mujeres")+theme(legend.position = "right")

```

```

+ theme(legend.title=element_blank())

#Graficamos Las dos juntas:
windows()
grid.arrange(plotmx, plotmx_M, ncol=2)

# 3) Lx: Supervivientes a La edad exacta x

#Lx Mujeres

lx_M<-c(1:111)
dx_M<-c(1:111)
for (i in 1:111){
  if(i==1){
    lx_M[i]<-100000
    dx_M[i]<-(as.numeric(lx_M[i]*qx2016[i,3]))
  } else{
    lx_M[i]<- as.numeric(lx_M[i-1]-dx_M[i-1])
    dx_M[i]<- as.numeric(lx_M[i]*qx2016[i,3]) }
}

#Lx Hombres

lx_H<-c(1:111)
dx_H<-c(1:111)
for (i in 1:111){
  if(i==1){
    lx_H[i]<-100000
    dx_H[i]<-(as.numeric(lx_H[i]*qx2016[i,4]))
  } else{
    lx_H[i]<-as.numeric(lx_H[i-1]-dx_H[i-1])
    dx_H[i]<-as.numeric(lx_H[i]*qx2016[i,4]) }
}

#   lx_H[i]<-ceiling(as.numeric(lx_H[i-1]-dx_H[i-1]))
#   dx_H[i]<-ceiling(as.numeric(lx_H[i]*qx2016[i,4])) }
#} #ceiling nos sirve para redondear al alza siempre

# 4) Lx: número medio de personas vivas entre x y x+1 años

# Suponemos que Las muertes se reparten uniformemente (ax=1/2)

Lx_H<-c(1:111)
Lx_M<-c(1:111)
for (i in 1:111){
  # Para Hombres:
  Lx_H[i]<-lx_H[i]-1/2*dx_H[i]
  # Para Mujeres:
  Lx_M[i]<-lx_M[i]-1/2*dx_M[i]
}

# 5) px: tanto anual de supervivencia

```

```

# Para Hombres:
px_H<-1-as.numeric(qx2016[,4])

# Para Mujeres:
px_M<-1-as.numeric(qx2016[,3])

# 6) ex: esperanza de vida a La edad x

ex_H<-c(1:111)
ex_M<-c(1:111)
for (i in 1:111){
  # Para Hombres:
  ex_H[i]<-sum(Lx_H[i:111])/lx_H[i]
  # Para mujeres:
  ex_M[i]<-sum(Lx_M[i:111])/lx_M[i]
}

# 7) Tx: cantidad de existencia a La edad x

Tx_H<-c(1:111)
Tx_M<-c(1:111)
for (i in 1:111){
  # Para Hombres:
  Tx_H[i]<-sum(Lx_H[i:111])
  # Para Mujeres:
  Tx_M[i]<-sum(Lx_M[i:111])
}

# 8) Tabla de mortalidad paneuropea

# 8.1) Tabla de mortalidad paneuropea de Mujeres: generación 2016

tabla_mujeres<-as.data.frame(cbind(qx2016[,2], qx2016[,3], px_M,
                                  lx_M, dx_M, Lx_M, ex_M))
colnames(tabla_mujeres)<-c('Edad', 'qx', 'px', 'lx', 'dx', 'Lx', 'ex')

# Tabla de mortalidad paneuropea Hombres: generación 2017
tabla_hombres<-as.data.frame(cbind(qx2016[,2], qx2016[,4], px_H,
                                   lx_H, dx_H, Lx_H, ex_H))
colnames(tabla_hombres)<-c('Edad', 'qx', 'px', 'lx', 'dx', 'Lx', 'ex')

# Tabla para mostrar en el trabajo:

# Creamos un vector con las filas que queremos ver:
vector<-c(1:23)
for(k in 1:23){vector[k]<-k*5-4}

#Rehacemos Las tablas:
tabla_mujeres_X<-as.data.frame(cbind(tabla_mujeres[vector,1],
                                     tabla_mujeres[vector,2],
                                     tabla_mujeres[vector,3],
                                     tabla_mujeres[vector,4],
                                     tabla_mujeres[vector,5],

```

```

        tabla_mujeres[vector,6],
        tabla_mujeres[vector,7]))
colnames(tabla_mujeres_X)<-c('Edad', 'qx', 'px', 'lx', 'dx', 'Lx', 'ex')

tabla_hombres_X<-as.data.frame(cbind(tabla_hombres[vector,1],
        tabla_hombres[vector,2],
        tabla_hombres[vector,3],
        tabla_hombres[vector,4],
        tabla_hombres[vector,5],
        tabla_hombres[vector,6],
        tabla_hombres[vector,7]))
colnames(tabla_hombres_X)<-c('Edad', 'qx', 'px', 'lx', 'dx', 'Lx', 'ex')

#Las colocamos en otro formato para ser trasladadas al trabajo:

library(kableExtra)
tabla_hombres_X %>%
  kbl() %>%
  kable_classic_2(full_width = F)

tabla_mujeres_X %>%
  kbl() %>%
  kable_classic_2(full_width = F)

#####
##### ESTUDIO DE LONGEVIDAD: CONTINUACIÓN #####
#####

# 1) Ajuste de La base de datos

require(demography)
if (!require(StMoMo)) install.packages("StMoMo", repos = "http://cran.
rstudio.com")
require(StMoMo)

mx_LC<- mx %>% arrange(Year)

# De Largo a ancho:
mx_wide_F <- matrix(NA, ncol = 27, nrow = 111)
mx_wide_M <- matrix(NA, ncol = 27, nrow = 111)
Lx_wide_F <- matrix(NA, ncol = 27, nrow = 111)
Lx_wide_M <- matrix(NA, ncol = 27, nrow = 111)

for (k in 1990:2016){
  for (j in 0:110){
    mx_wide_F[j+1,k-1989] <- mx_LC[mx_LC[,1] == k & mx_LC[,2]==j, 3]
    mx_wide_M[j+1,k-1989] <- mx_LC[mx_LC[,1] == k & mx_LC[,2]==j, 4]
    Lx_wide_F[j+1,k-1989] <- Lx[Lx[,1] == k & Lx[,2]==j, 3]
    Lx_wide_M[j+1,k-1989] <- Lx[Lx[,1] == k & Lx[,2]==j, 4]
  }
}

```

```

colnames(mx_wide_F) <- colnames(mx_wide_M) <- c(1990:2016)
colnames(Lx_wide_F) <- colnames(Lx_wide_M) <- c(1990:2016)
rownames(mx_wide_F) <- rownames(mx_wide_M) <- c(0:110)
rownames(Lx_wide_F) <- rownames(Lx_wide_M) <- c(0:110)

years_sp_P <- 1990:2016

# Centraremos nuestro estudio en la edad comprendida para la realización del plan
# de pensiones paneuropeo:

edades <- c(0:110)

# Mujeres
mx_wide_F_red <- mx_wide_F[edades + 1, ]
Lx_wide_F_red <- Lx_wide_F[edades + 1, ]

# Hombres
mx_wide_M_red <- mx_wide_M[edades + 1, ]
Lx_wide_M_red <- Lx_wide_M[edades + 1, ]

# 2) Creación de la nueva base de datos para el estudio de la Longevidad:

# Hay que adaptar los datos a demogdata para el estudio de Lee-Carter:

# Inputs de la nueva base de datos:

data_M<- mx_wide_M
pop_M<- Lx_wide_M
data_F<- mx_wide_F
pop_F<- Lx_wide_F
ages<- edades
years<- years_sp_P
type<- "mortality"
label<- "Europa-16"
name_F<- "Female"
name_M<- "Male"
lambda<-0

# Base de datos paneuropea para mujeres:

PanData_F<-demogdata(data_F, pop_F, ages, years, type, label, name_F,
lambda)

# Base de datos paneuropea para hombres:

PanData_M<-demogdata(data_M, pop_M, ages, years, type, label, name_M,
lambda)

# 3) Estudio de Lee-Carter

# 3.1) Ajustando el Modelo Generalizado de Lee-Carter y realizando Pro

```

```

yecciones

# Para hombres:

# Estimación del modelo base de Lee-Carter (con errores de Poisson)

modelo_Male <- lca.rh(PanData_M, mod= 'lc', interpolate = T, verbose =
F, series = "Male")
modelo_Male

par(mfrow=c(1,1))
windows()
plot(modelo_Male)

# Proyecciones de La mortalidad y supervivencia:

forecast_Male <- forecast(modelo_Male, h = 40, jump = 'fit', level = 9
0,
                        shift = F)

windows()
plot(forecast_Male, xlim = c(0,100))

# Insertar Leyenda manual:
points(5,-2,pch=0,col="red", cex=1.25)
text(20,-2,"2017-2023", cex=1)
points(5,-2.5,pch=0,col="yellow", cex=1.25)
text(20,-2.5,"2024-2030", cex=1)
points(5,-3,pch=0,col="green", cex=1.25)
text(20,-3,"2031-2038", cex=1)
points(5,-3.5,pch=0,col="cyan", cex=1.25)
text(20,-3.5,"2039-2045", cex=1)
points(5,-4,pch=0,col="blue", cex=1.25)
text(20,-4,"2046-2052", cex=1)
points(5,-4.5,pch=0,col="purple", cex=1.25)
text(20,-4.5,"2053-2056", cex=1)

mx_H_proyectada<- forecast_Male$rate$Male
qx_H_proyectada<-mx_H_proyectada/(1+1/2*mx_H_proyectada)
px_H_proyectada<- 1-qx_H_proyectada
colnames(qx_H_proyectada) <-colnames(px_H_proyectada) <- c(2017:2056)
rownames(qx_H_proyectada) <-rownames(px_H_proyectada) <- c(0:100)

lifeexpectancy_male <- life.expectancy(forecast_Male, age=65)
windows()
flc.plot(modelo_Male, at = 65, h = 40, level = 90)

# Para Mujeres:

# Estimación del modelo base de Lee-Carter (con errores de Poisson)

modelo_Female <- lca.rh(PanData_F, mod= 'lc', interpolate = T, verbose
= F,

```

```

                                series = "Female")
modelo_Female

par(mfrow=c(1,1))
windows()
plot(modelo_Female)

# Proyecciones de La mortalidad y La supervivencia:

forecast_Female <- forecast(modelo_Female, h = 40, jump = 'fit', level
= 90,
                                shift = F)
windows()
plot(forecast_Female, xlim = c(0,100))
# Insertar Leyenda manual:
points(5,-2,pch=0,col="red", cex=1.25)
text(20,-2,"2017-2023", cex=1)
points(5,-2.5,pch=0,col="yellow", cex=1.25)
text(20,-2.5,"2024-2030", cex=1)
points(5,-3,pch=0,col="green", cex=1.25)
text(20,-3,"2031-2038", cex=1)
points(5,-3.5,pch=0,col="cyan", cex=1.25)
text(20,-3.5,"2039-2045", cex=1)
points(5,-4,pch=0,col="blue", cex=1.25)
text(20,-4,"2046-2052", cex=1)
points(5,-4.5,pch=0,col="purple", cex=1.25)
text(20,-4.5,"2053-2056", cex=1)

mx_F_proyectada<- forecast_Female$rate$Female
qx_F_proyectada<-mx_F_proyectada/(1+1/2*mx_F_proyectada)
px_F_proyectada<-1-qx_F_proyectada
colnames(qx_F_proyectada) <- colnames(px_F_proyectada) <- c(2017:2056)
rownames(qx_F_proyectada) <- rownames(px_F_proyectada) <- c(0:100)

lifeexpectancy_Female <- life.expectancy(forecast_Female, age=65)
windows()
flc.plot(modelo_Female, at = 65, h = 40, level = 90)

#####
##### CÁLCULO qx PERM/F #####
#####

# Transformamos La base de datos para tratarLa:

qx_nueva_F<-cbind(qx2016[1:101,3],qx_F_proyectada)
qx_nueva_M<-cbind(qx2016[1:101,4],qx_H_proyectada)

colnames(qx_nueva_F)<-colnames(qx_nueva_M)<-c(2016:2056)
qx_new_F <- matrix(NA, ncol = 101, nrow = 41)
qx_new_M <- matrix(NA, ncol = 101, nrow = 41)

```

```

for (k in 0:100){
  for (j in 2016:2056){
    qx_new_F[j-2015,k+1] <- qx_nueva_F[k+1,j-2015]
    qx_new_M[j-2015,k+1] <- qx_nueva_M[k+1,j-2015]
  }
}

rownames(qx_new_F)<-rownames(qx_new_M)<-c(2016:2056)
colnames(qx_new_F)<-colnames(qx_new_M)<-c(0:100)

# Ahora ya podemos crear la nueva qx que seguirá la siguiente fórmula:

#  $qx_t = qx_{base2016} * exp(-\lambda*(T-2016))$ 

# Calculamos Los factores de mejora de datos proyectados:

fm_mujeres<- matrix(NA, ncol = 101, nrow = 40)
fm_hombres<- matrix(NA, ncol = 101, nrow = 40)

for (j in 1:101){
  for (i in 1:40){
    fm_mujeres[i,j] <- qx_new_F[i,j]/qx_new_F[i+1,j]-1
    fm_hombres[i,j] <- qx_new_M[i,j]/qx_new_M[i+1,j]-1
  }
}

# Calculamos Los factores de mejora por edad (Lambda):

lambda_h <- as.data.frame(colMeans(fm_hombres))
lambda_m <- as.data.frame(colMeans(fm_mujeres))
colnames(lambda_h)<-colnames(lambda_m)<-"lambda"
rownames(lambda_h)<-rownames(lambda_m)<-c(0:100)

# Ahora, ya podemos calcular Las qx PERM/F:

qx_PERM_mujeres<- matrix(NA, ncol = 41, nrow = 101)
qx_PERM_hombres<- matrix(NA, ncol = 41, nrow = 101)

for (j in 1:41){
  for (i in 1:101){
    qx_PERM_mujeres[i,j] <- qx2016[i,3]*exp(-lambda_m[i,1]*(2015+j-2016))
    qx_PERM_hombres[i,j] <- qx2016[i,4]*exp(-lambda_h[i,1]*(2015+j-2016))
  }
}

colnames(qx_PERM_mujeres)<-colnames(qx_PERM_hombres)<-c(2016:2056)
rownames(qx_PERM_mujeres)<-rownames(qx_PERM_hombres)<-c(0:100)

# Cambiamos el valor de La edad 100 por 1, para que  $q_{100+}=1$ :

qx_PERM_mujeres[101,]<-1

```

```

qx_PERM_hombres[101,]<-1

# Estas qx las necesitaremos para el cálculo de las aportaciones del p
lan

# Calculamos La Lx PERM/F en función de La qx:

# Lx: Supervivientes a La edad exacta x

lx_PERM_mujeres<- matrix(NA, ncol = 41, nrow = 101)
lx_PERM_hombres<- matrix(NA, ncol = 41, nrow = 101)

# Necesitaremos para el cálculo de La Lx, La dx:

dx_PERM_mujeres<- matrix(NA, ncol = 41, nrow = 101)
dx_PERM_hombres<- matrix(NA, ncol = 41, nrow = 101)

for (j in 1:41){
  for (i in 1:101){
    if(i==1){
      lx_PERM_mujeres[i,j]<-100000
      lx_PERM_hombres[i,j] <-100000
      dx_PERM_mujeres[i,j]<-as.numeric(lx_PERM_mujeres[i,j]
                                      *qx_PERM_mujeres[i,j])
      dx_PERM_hombres[i,j]<-as.numeric(lx_PERM_hombres[i,j]
                                      *qx_PERM_hombres[i,j])
    } else{
      lx_PERM_mujeres[i,j]<- as.numeric(lx_PERM_mujeres[i-1,j]
                                      -dx_PERM_mujeres[i-1,j])
      dx_PERM_mujeres[i,j]<- as.numeric(lx_PERM_mujeres[i,j]
                                      *qx_PERM_mujeres[i,j])
      lx_PERM_hombres[i,j]<- as.numeric(lx_PERM_hombres[i-1,j]
                                      -dx_PERM_hombres[i-1,j])
      dx_PERM_hombres[i,j]<- as.numeric(lx_PERM_hombres[i,j]
                                      *qx_PERM_hombres[i,j])}
  }
}

colnames(lx_PERM_mujeres)<-colnames(lx_PERM_hombres)<-c(2016:2056)
rownames(lx_PERM_mujeres)<-rownames(lx_PERM_hombres)<-c(0:100)

# Ahora calcularemos La px en función de La qx también:

px_PERM_mujeres <-1-qx_PERM_mujeres
px_PERM_hombres <- 1-qx_PERM_hombres
colnames(px_PERM_mujeres)<-colnames(px_PERM_hombres)<-c(2016:2056)
rownames(px_PERM_mujeres)<-rownames(px_PERM_hombres)<-c(0:100)

# A partir de aquí, trataremos La información con Excel

install.packages("xlsx")
library(xlsx)

```

```

# Luego escribimos el siguiente comando:
write.xlsx(lx_PERM_mujeres, "lx_PERM_mujeres.xlsx")
write.xlsx(lx_PERM_hombres, "lx_PERM_hombres.xlsx")

# Rehacemos lo mismo pero con datos históricos.

qx_lambda<- qx %>% arrange(Year)

# Ajustamos la base de datos:
qx_wide_F <- matrix(NA, ncol = 101, nrow = 27)
qx_wide_M <- matrix(NA, ncol = 101, nrow = 27)

for (k in 0:100){
  for (j in 1990:2016){
    qx_wide_F[j-1989,k+1] <- qx_lambda[qx_lambda[,1] == j
                                     & qx_lambda[,2]==k, 3]
    qx_wide_M[j-1989,k+1] <- qx_lambda[qx_lambda[,1] == j
                                     & qx_lambda[,2]==k, 4]
  }
}

colnames(qx_wide_F) <- colnames(qx_wide_M) <- c(0:100)
rownames(qx_wide_F) <- rownames(qx_wide_M) <- c(1990:2016)

# Calculamos los factores de mejora de datos históricos:

fmh_mujeres<- matrix(NA, ncol = 101, nrow = 26)
fmh_hombres<- matrix(NA, ncol = 101, nrow = 26)

for (j in 1:101){
  for (i in 1:26){
    fmh_mujeres[i,j] <- qx_wide_F[i,j]/qx_wide_F[i+1,j]-1
    fmh_hombres[i,j] <- qx_wide_M[i,j]/qx_wide_M[i+1,j]-1
  }
}

# Calculamos los factores de mejora históricos por edad (Lambda):

lambdah_h <- as.data.frame(colMeans(fmh_hombres))
lambdah_m <- as.data.frame(colMeans(fmh_mujeres))
colnames(lambdah_h)<-colnames(lambdah_m)<-"lambda"
rownames(lambdah_h)<-rownames(lambdah_m)<-c(0:100)

# Ahora, ya podemos calcular las qx PERM/F:

qx_PERM_mujeres_h<- matrix(NA, ncol = 41, nrow = 101)
qx_PERM_hombres_h<- matrix(NA, ncol = 41, nrow = 101)

for (j in 1:41){
  for (i in 1:101){
    qx_PERM_mujeres_h[i,j] <- qx2016[i,3]*exp(-lambdah_m[i,1]*(2015+j
-2016))
    qx_PERM_hombres_h[i,j] <- qx2016[i,4]*exp(-lambdah_h[i,1]*(2015+j

```

```

-2016))
  }
}

colnames(qx_PERM_mujeres_h)<-colnames(qx_PERM_hombres_h)<-c(2016:2056)
rownames(qx_PERM_mujeres_h)<-rownames(qx_PERM_hombres_h)<-c(0:100)

# Cambiamos el valor de La edad 100 por 1, para que q100+=1:

qx_PERM_mujeres_h[101,]<-1
qx_PERM_hombres_h[101,]<-1

# Calculamos La Lx PERM/F en función de La qx:

# Lx: Supervivientes a La edad exacta x

lx_PERM_mujeres_h<- matrix(NA, ncol = 41, nrow = 101)
lx_PERM_hombres_h<- matrix(NA, ncol = 41, nrow = 101)

# Necesitaremos para el cálculo de La Lx, La dx:

dx_PERM_mujeres_h<- matrix(NA, ncol = 41, nrow = 101)
dx_PERM_hombres_h<- matrix(NA, ncol = 41, nrow = 101)

for (j in 1:41){
  for (i in 1:101){
    if(i==1){
      lx_PERM_mujeres_h[i,j]<-100000
      lx_PERM_hombres_h[i,j] <-100000
      dx_PERM_mujeres_h[i,j]<-as.numeric(lx_PERM_mujeres_h[i,j]
                                         *qx_PERM_mujeres_h[i,j])
      dx_PERM_hombres_h[i,j]<-as.numeric(lx_PERM_hombres_h[i,j]
                                         *qx_PERM_hombres_h[i,j])
    } else{
      lx_PERM_mujeres_h[i,j]<- as.numeric(lx_PERM_mujeres_h[i-1,j]-dx_
PERM_mujeres_h[i-1,j])
      dx_PERM_mujeres_h[i,j]<- as.numeric(lx_PERM_mujeres_h[i,j]
                                         *qx_PERM_mujeres_h[i,j])
      lx_PERM_hombres_h[i,j]<- as.numeric(lx_PERM_hombres_h[i-1,j]-dx_
PERM_hombres_h[i-1,j])
      dx_PERM_hombres_h[i,j]<- as.numeric(lx_PERM_hombres_h[i,j]
                                         *qx_PERM_hombres_h[i,j])}
  }
}

colnames(lx_PERM_mujeres_h)<-colnames(lx_PERM_hombres_h)<-c(2016:2056)
rownames(lx_PERM_mujeres_h)<-rownames(lx_PERM_hombres_h)<-c(0:100)

# Pasamos La información a Excel

install.packages("xlsx")
library(xlsx)

```

```
# Luego escribimos el siguiente comando:  
write.xlsx(lx_PERM_mujeres_h, "lx_PERM_mujeres_h.xlsx")  
write.xlsx(lx_PERM_hombres_h, "lx_PERM_hombres_h.xlsx")
```

## Anexo II – Código Matlab

```

% Modelización de los tipos de intereses. Modelo G2++ o Hull-White de 2
% factores

Settle = datenum('1-Jan-2017');

% Se construye una curva cero a partir de los datos de Toolbox
CurveDates = daysadd(Settle,360*([1 3 10 15 30 50]),1);
ZeroRates = [1.9 2.6 3.1 3.5 4 4.3]'/100;

% Se construye una curva IRD
irdc = IRDataCurve('Zero',Settle,CurveDates,ZeroRates);

% Se crea el intervalo de tiempo
RateSpec =
intenvset('Rates',ZeroRates,'EndDates',CurveDates,'StartDate',Settle)

% Definir los parámetros de los swaptions
InstrumentExerciseDate = datenum('21-Jul-2017');
InstrumentMaturity = datenum('21-Jul-2025');
InstrumentStrike = .045;

% Cálculo del Black Model y la matriz de volatilidad de Swaption
SwaptionBlackVol = [22 21 19 17 15 13 12
    21 19 17 16 15 13 11
    20 18 16 15 14 12 11
    19 17 15 14 13 12 10
    18 16 14 13 12 11 10
    15 14 13 12 12 11 10
    13 13 12 11 11 10 9]/100;
ExerciseDates = [1:5 7 10];
Tenors = [1:5 7 10];

EurExDatesFull = repmat(daysadd(Settle,ExerciseDates*360,1)',...
    length(Tenors),1);
EurMatFull = reshape(daysadd(EurExDatesFull,...
    repmat(360*Tenors,1,length(ExerciseDates)),1),size(EurExDatesFull));

% Selección de los instrumentos para calibrar el modelo

reliidx = find(EurMatFull <= InstrumentMaturity);

```

```

% Encuentre las swaptions que vencen en o antes de la fecha de
vencimiento

% Calcular los precios de los swaptions con el modelo de Black

SwaptionBlackPrices = zeros(size(SwaptionBlackVol));
SwaptionStrike = zeros(size(SwaptionBlackVol));

for iSwaption=1:length(ExerciseDates)
    for iTenor=1:length(Tenors)
        [~,SwaptionStrike(iTenor,iSwaption)] = swapbyzero(RateSpec,[NaN
0], Settle, EurMatFull(iTenor,iSwaption),...
        'StartDate',EurExDatesFull(iTenor,iSwaption),'LegReset',[1
1]);
        SwaptionBlackPrices(iTenor,iSwaption) = swaptionbyblk(RateSpec,
'call', SwaptionStrike(iTenor,iSwaption),Settle, ...
        EurExDatesFull(iTenor,iSwaption),
EurMatFull(iTenor,iSwaption), SwaptionBlackVol(iTenor,iSwaption));
    end
end

% Definiición de parámetros de simulación

rng('default');

% Ahora, inicie el generador aleatorio con una semilla = 1

rng(1);
nPeriods = 30*12; % 30 años x 12 meses
DeltaTime = 1/12; % periodicidad: mensual
nsim = 100; % número de simulaciones

Tenor = (1:8)'; % Establecemos diferentes escenarios de períodos

SimDates = daysadd(Settle,360*DeltaTime*(0:nPeriods),1)
SimTimes = diff(yearfrac(SimDates(1),SimDates))

% Simulamos ya los tipos de interes

% Calibración del modelo:

G2PPobjfun = @(x) SwaptionBlackPrices(releidx) -
swaptionbylg2f(irdc,x(1),x(2),x(3),x(4),x(5),SwaptionStrike(releidx),...

```

```
EurExDatesFull(releidx),EurMatFull(releidx),'Reset',1);

options = optimset('disp','iter','MaxFunEvals',1000,'TolFun',1e-5);
x0 = [.2 .1 .02 .01 -.5];
lb = [0 0 0 0 -1];
ub = [1 1 1 1 1];
LG2Fparams = lsqnonlin(G2PPobjfun,x0,lb,ub,options)

% Se crea el objeto G2PP y se utiliza la simulación Monte Carlo
% para generar las trayectorias de los tipos de interés

LG2f_a = LG2Fparams(1);
LG2f_b = LG2Fparams(2);
LG2f_sigma = LG2Fparams(3);
LG2f_eta = LG2Fparams(4);
LG2f_rho = LG2Fparams(5);

G2PP =
LinearGaussian2F(RateSpec, LG2f_a, LG2f_b, LG2f_sigma, LG2f_eta, LG2f_rho);

G2PPSimPaths = G2PP.simTermStructs(nPeriods, 'NTRIALS', nTrials, ...
'DeltaTime', DeltaTime, 'Tenor', Tenor, 'antithetic', true);
```